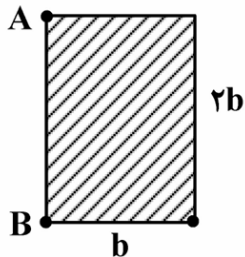


۷۲- گشتاور خمشی M به تیری با مقطع مستطیل وارد می‌شود. اگر کرنش طولی در نقاط A و B به ترتیب $\epsilon_A = 0.0022$ و $\epsilon_B = -0.0011$ باشد، مقدار زاویه‌ای که M با راستای افق می‌سازد چقدر است؟



مشابه جزوه آموزشی
سطح سوال متوسط

$$\tan^{-1} \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

مبدأ را مرکز مقطع O ، محور y رو به بالا و z رو به راست می‌گیریم.

$$A\left(\frac{-b}{2}, b\right), \quad B\left(\frac{-b}{2}, -b\right)$$

چون توزیع کرنش خطی است:

$$\epsilon = C_1 y + C_2 z$$

$$A \text{ در نقطه } : C_1 b - C_2 \frac{b}{2} = 0.0022$$

$$B \text{ در نقطه } : -C_1 b - C_2 \frac{b}{2} = -0.0011$$

در نتیجه داریم:

$$C_1 = \frac{0.00165}{b}, \quad C_2 = -\frac{0.0011}{b}$$

می‌دانیم که روی تار خنثی، کرنش صفر است. پس داریم:

$$0.00165y - 0.0011z = 0$$

پس معادله‌ی تار خنثی برابر است با:

$$y = \frac{2}{3}z$$

از طرفی مطابق درسنامه داشتیم:

$$y = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \ z$$

ممان اینرسی برای مستطیل $b \times 2b$:

$$\frac{I_z}{I_y} = \frac{\frac{b(2b)^3}{12}}{\frac{(2b)b^3}{12}} = 4$$

بنابراین:

$$\frac{2}{3} = 4 \tan \theta \rightarrow \tan \theta = \frac{1}{6} \rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{6} \right)}$$

راه حل دوم:

چون نقاط A و B مختصات افقی یکسان دارند: سهم M_y در کرنش آن‌ها یکسان و سهم M_x در کرنش آن‌ها خلاف علامت است.

$$\varepsilon_{M_y} = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} = \frac{0.0022 - 0.0011}{2} = 0.00055$$

$$\varepsilon_{M_x} = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{2} = \frac{0.0022 + 0.0011}{2} = 0.00165$$

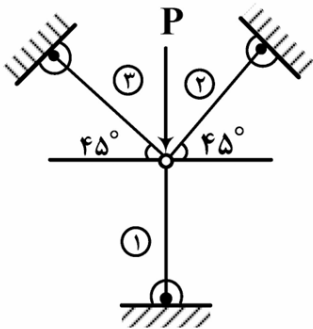
از رابطه تنش خمشی و قانون عمومی هوک داریم:

$$\sigma = \frac{My}{I}, \quad \sigma = E\varepsilon \rightarrow E\varepsilon = \frac{My}{I} \rightarrow \boxed{M = \frac{EI\varepsilon}{y}} \rightarrow \frac{M_y}{M_x} = \frac{\varepsilon_{M_y}}{\varepsilon_{M_x}} \times \frac{I_y}{I_x} \times \frac{b}{b/2}$$

برای مقطع $b \times 2b$:

$$\frac{I_y}{I_x} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{M_y}{M_x} = \frac{0.00055}{0.00165} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{6} \rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{6} \right)}$$

۷۳- سه میله با E, A و L یکسان مطابق شکل به هم متصل هستند. تنش در میله (۱) چند برابر $\frac{P}{A}$ است؟



مشابه جزوه آموزشی
سطح سوال ساده

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۳) ۲

(۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

حل با استفاده از روش معادلسازی میله ها. می دانیم سختی هر میله برابر $k = \frac{EA}{L}$ است. به علت تقارن، گره مرکزی فقط قائم جابه جا می شود. می توان نتیجه گرفت عملکرد میله ها به صورت موازی است.

برای میله قائم ۱:

$$k_{v1} = k = \frac{EA}{L}$$

برای هر میله مورب با زاویه 45° نسبت به افق:

$$k_v = k \cos^2 45^\circ = \frac{EA}{L} \times \frac{1}{2} = \frac{EA}{2L}$$

پس سه فنر نسبت به جابه جایی قائم، موازی اند و سختی معادل آن ها برابر است با:

$$k_{eq} = \frac{EA}{L} + 2 \left(\frac{EA}{2L} \right) = \frac{2EA}{L}$$

جابه جایی گره :

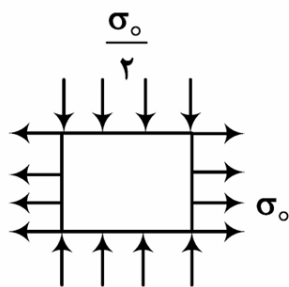
$$\delta = \frac{P}{k_{eq}} = \frac{PL}{2EA}$$

نیروی میله قائم:

$$N_1 = k_1 \delta = \frac{EA}{L} \times \frac{PL}{2EA} = \frac{P}{2} \rightarrow \boxed{\sigma_1 = -\frac{P}{2A}}$$

۷۴- ورق مستطیل شکل زیر، تحت بارگذاری دومیحوره (تنش صفحه‌ای) قرار دارد. اگر نسبت پواسون ماده ورق $\nu = 0.5$ و مدول

یانگ آن E باشد، کرنش حجمی ورق چند برابر $\frac{\sigma_0}{E}$ است؟



(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

مشابه جزوه آموزشی

سطح سوال ساده

پاسخ: گزینه ۳

با فرض کشش مثبت، تنش‌ها عبارت‌اند از:

$$\sigma_x = +\sigma_0$$

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{2}$$

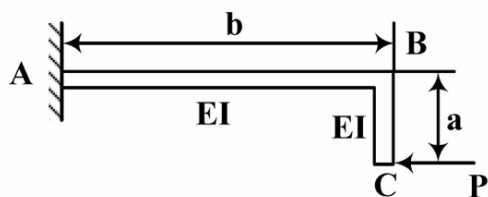
و چون حالت تنش صفحه‌ای است $\sigma_z = 0$ می‌باشد. رابطه کرنش حجمی برای ماده همسانگرد برابر است با:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

با جایگذاری $\nu = 0.5$ ، $\sigma_x = +\sigma_0$ ، $\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{2}$ و $\sigma_z = 0$ در رابطه فوق داریم:

$$\varepsilon_v = \frac{2}{E} \left(\frac{\sigma_0}{2} \right) = \frac{\sigma_0}{E}$$

۷۵- در تیر شکل زیر، جابه‌جایی قائم نقطه C چقدر است؟



مشابه جزوه آموزشی

سطح سوال ساده

$$(۱) \frac{Pab^2}{2EI}$$

$$(۲) \frac{Pab^2}{EI}$$

$$(۳) \frac{Pa^2b}{2EI}$$

$$(۴) \frac{Pa^2b}{EI}$$

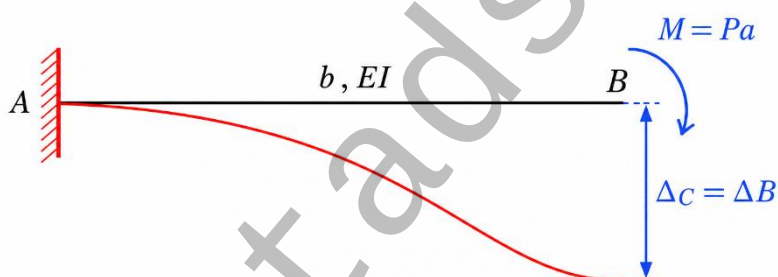
پاسخ: گزینه ۱

نیروی افقی P در نقطه C را به نقطه B منتقل می‌کنیم. در B:

• یک نیروی افقی P در امتداد عضو AB، که فقط تغییر طول محوری ایجاد می‌کند (بنابراین تغییر شکل خمشی ندارد)

• یک گشتاور $M_B = Pa$

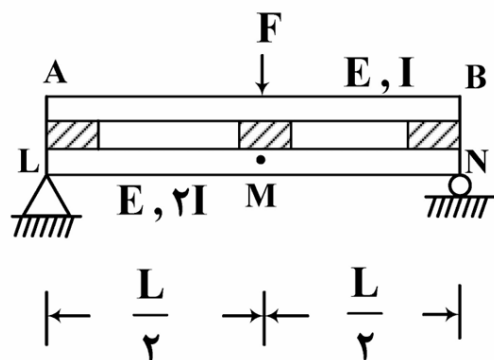
بنابراین عضو افقی AB مانند طره‌ای به طول b تحت گشتاور انتهایی Pa است. جابه‌جایی قائم انتهای طره تحت گشتاور انتهایی M:



$$\Delta_C = \Delta_B = \frac{Mb^2}{2EI} = \frac{Pab^2}{2EI}$$

۷۶- تیرهای AB و LN در وسط و دو انتها توسط قطعات صلب کوچک مطابق شکل به هم متصل شده‌اند. تغییر مکان

نقطه M چند برابر $\frac{FL^3}{EI}$ است؟



مشابه جزوه آموزشی

سطح سوال ساده

(۱) $\frac{1}{48}$

(۲) $\frac{1}{96}$

(۳) $\frac{1}{144}$

(۴) $\frac{1}{169}$

پاسخ: گزینه ۳

به دلیل وجود قطعه صلب میانی، تغییر مکان وسط دو تیر برابر است؛ بنابراین دو تیر در برابر جابه‌جایی قائم مانند دو فنر موازی عمل می‌کنند. سختی وسط یک تیر دوسر ساده تحت نیروی متمرکز وسط دهانه

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

برای تیر بالایی با سختی خمشی EI:

$$k_1 = \frac{48EI}{L^3}$$

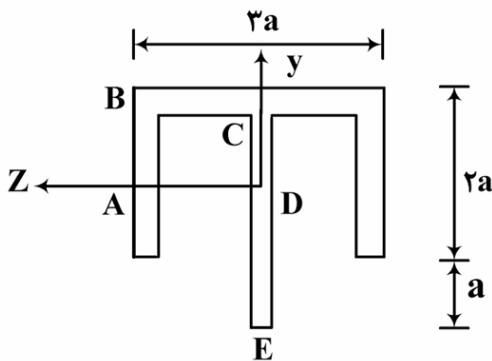
برای تیر پایینی با سختی خمشی 2EI:

$$k_2 = \frac{48(2EI)}{L^3} = \frac{96EI}{L^3}$$

پس سختی معادل (با توجه به عملکرد موازی سختی‌ها با هم جمع می‌شوند):

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = \frac{144EI}{L^3} \rightarrow \delta_M = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{FL^3}{144EI}$$

۷۷- در شکل زیر، مقطع یک تیر جدار نازک به ضخامت یکنواخت t ($t \ll a$) تحت اثر نیروی برشی V قرار گرفته است. مؤلفه تنش برشی در کدام ناحیه صفر می‌شود؟ (از لبه‌های A و E که تنش برشی در آنها صفر است صرف نظر کنید).



مشابه جزوه آموزشی
سطح سوال سخت

- AB (۱)
- BC (۲)
- CD (۳)
- DE (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (نکته قطعه آویزان در جزوه آموزشی)

برای مقطع جدار نازک $q = \tau t = \frac{VQ}{I_z}$ است. پس تنش برشی جایی صفر است که $Q = 0$ (ممان استاتیکی) شود. ابتدا محل تار خنثی را از بال بالا محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{y} = \frac{2(2at)(a) + (3at)(1.5a)}{3at + 2(2at) + 3at} = \frac{17a}{20} = 0.85a$$

$$Q_B = (3at) \left(a - \frac{17a}{20} \right) = \frac{3}{20} a^2 t > 0$$

اگر s فاصله از B روی BC باشد:

$$Q(s) = \frac{3}{20} a^2 t - \frac{17a}{20} (ts)$$

با قرار دادن $Q = 0$:

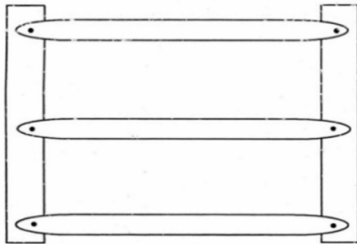
$$s = \frac{6a}{17}$$

و چون

$$0 < \frac{6a}{17} < \frac{3a}{2} = BC$$

نقطه صفر تنش برشی داخل ناحیه BC قرار دارد.

۷۸- سه میله کاملاً یکسان به صورت متقارن به دو تیر صلب متصل شده‌اند. اگر فقط میله وسط را به میزان ΔT گرم کنیم، تنش در این میله چند برابر حالتی است که فقط دو میله کناری را به میزان $\frac{\Delta T}{۳}$ سرد کنیم؟ (فرض کنید میله‌ها افقی باقی می‌مانند.)



مشابه جزوه آموزشی
سطح سوال متوسط

- (۱) ۴
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

چون دو تیر صلب‌اند و دوران ندارند، تغییر طول واقعی هر سه میله یکسان و برابر δ است. برای سه میله‌ی یکسان و بدون نیروی خارجی:

$$N_i = \frac{EA}{L}(\delta - \delta_{Ti}), \quad \sum N_i = 0 \quad \text{و} \quad \boxed{\delta = \text{میانگین تغییر طول آزاد سه میله}}$$

حالت اول) فقط میله وسط گرم شود:

تغییر طول‌های آزاد:

$$\delta_1, \alpha\Delta T L, 0$$

بنابراین چون سه میله یکسان‌اند و تیرهای صلب افقی می‌مانند، کرنش واقعی برابر میانگین کرنش‌های حرارتی است. ($\sigma = E\varepsilon$)

$$\varepsilon = \frac{\alpha\Delta T}{۳} \rightarrow \sigma_{\text{وسط},1} = E\left(\frac{\alpha\Delta T}{۳} - \alpha\Delta T\right) = -\frac{۲}{۳}E\alpha\Delta T$$

حالت دوم) دو میله کناری هر کدام $\frac{\Delta T}{2}$ سرد شوند:

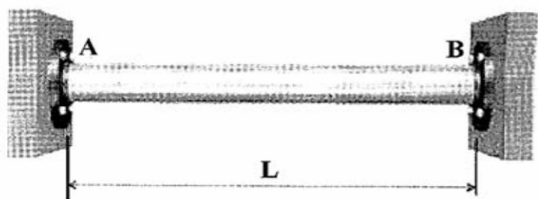
تغییر طول‌های آزاد:

$$\delta = \frac{-\frac{\alpha\Delta T L}{۲} + 0 - \frac{\alpha\Delta T L}{۲}}{۳} = -\frac{\alpha\Delta T L}{۳} \rightarrow \sigma_{\text{وسط},2} = -\frac{۱}{۳}E\alpha\Delta T$$

بنابراین:

$$\frac{|\sigma_{\text{وسط},1}|}{|\sigma_{\text{وسط},2}|} = \frac{۲/۳}{۱/۳} = ۲$$

۷۹- میله‌ای فولادی با استحکام بالا با مقطع دایره توپر به قطر d ($d \ll L$) مطابق شکل بین دو دیواره صلب کاملاً محکم شده است. با فرض مدول یانگ E ، تنش تسلیم σ_Y و ضریب انبساط حرارت طولی α ، حداکثر چه مقدار میله را می‌توان گرم کرد که دچار کمانش نشود؟



مشابه جزوه آموزشی
سطح سوال ساده

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 d^2}{4\alpha L^2} \quad (1)$$

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 E d^2}{4\alpha \sigma_Y L^2} \quad (2)$$

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 d^2}{16\alpha L^2} \quad (3)$$

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 E d^2}{16\alpha \sigma_Y L^2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

چون دو سر میله کاملاً گیردار است $L_{eff} = \frac{L}{2}$ می‌باشد. نیروی فشاری ناشی از گرم شدن برابر است با $P_T = EA\alpha\Delta T$.

بار کمانش اولیه:

$$P_{cr} = P_T = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow EA\alpha\Delta T = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow \Delta T_{cr} = \frac{4\pi^2 I}{A\alpha L^2}$$

برای مقطع دایره:

$$\frac{I}{A} = \frac{d^2}{16} \rightarrow \boxed{\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 d^2}{4\alpha L^2}}$$

جمع بندی:

از مجموع ۸ سؤال بررسی شده، ۵ سؤال معادل ۶۲٫۵ درصد ساده، ۲ سؤال معادل ۲۵ درصد متوسط و یک سؤال معادل ۱۲٫۵ درصد سخت ارزیابی شد. در مجموع، سطح سؤالات ساده متمایل به متوسط بوده و سوال ۷۷ تنها سؤال سخت و تفکیک کننده مجموعه محسوب می شود. همچنین تمام سؤالات از نظر ایده و روش حل، مشابه مطالب و مثال های جزوه آموزشی بوده اند.

موفق باشید