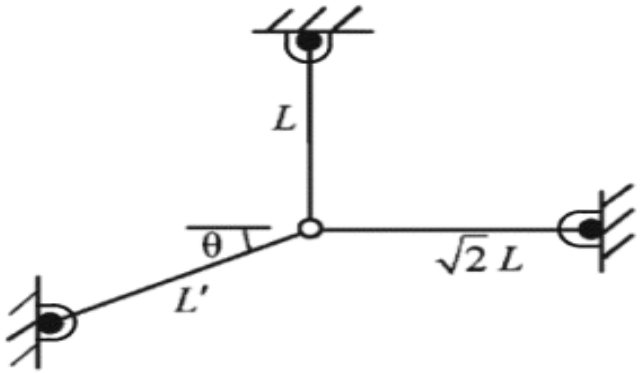
۷۳- سه میله با مشخصات E و I یکسان با اتصالات لولایی به یکدیگر و به زمین در یک صفحه متصل شده‌اند. فقط میله به طول L' را گرم می‌کنیم. تانژانت زاویه θ و طول L' برای آنکه کمانش در هر سه میله همزمان رخ دهد، کدام است؟



۱) $\tan\theta = \sqrt{2}\ ,\ L' = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}}L$

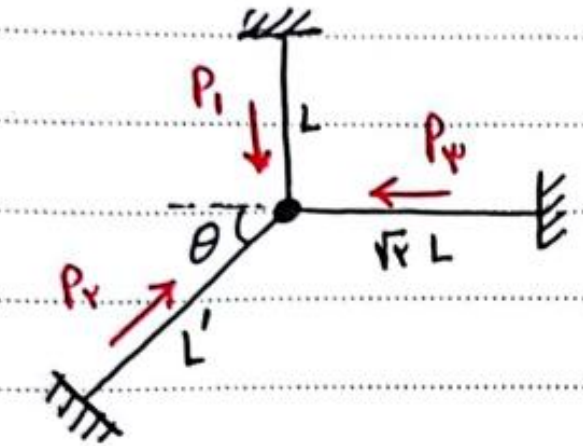
۲) $\tan\theta = 2\ ,\ L' = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}}L$

۳) $\tan\theta = 2\ ,\ L' = \sqrt{\frac{2}{5}}L$

۴) $\tan\theta = \sqrt{2}\ ,\ L' = \sqrt{\frac{2}{5}}L$

با توجه به اینکه سازه نامعین است، با تغییر اثر دما، تنش به اعضا وارد می‌گردد.

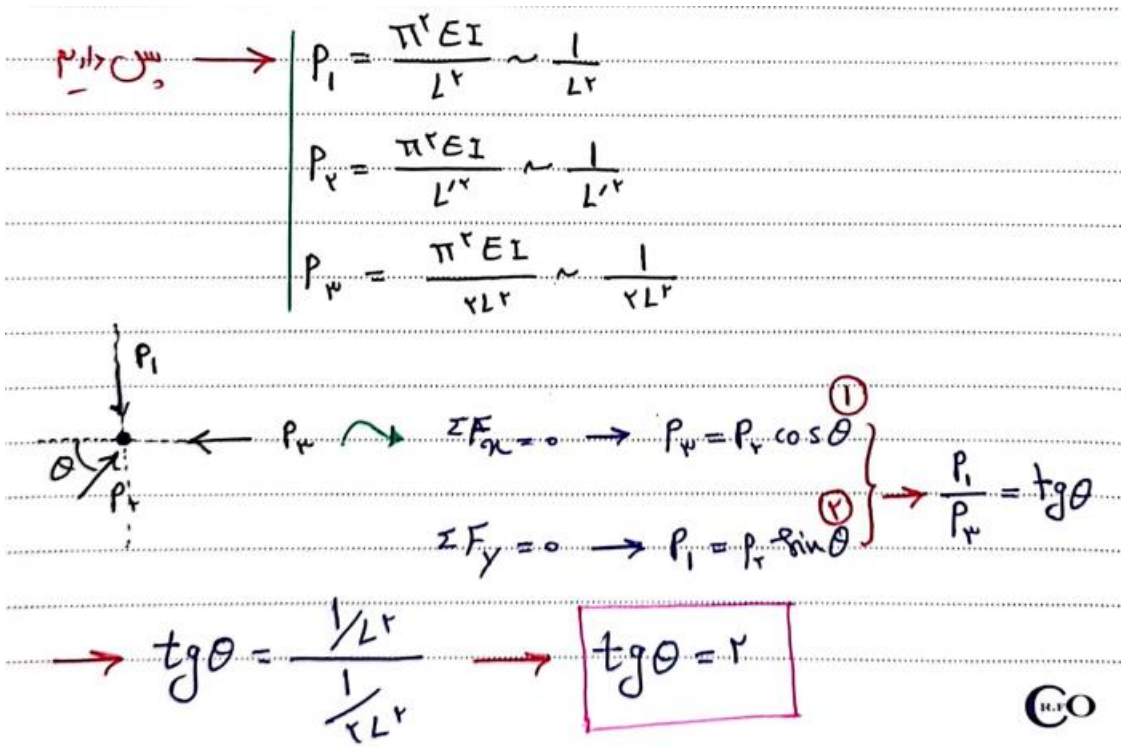
در هر ۳ میله یکسان است.

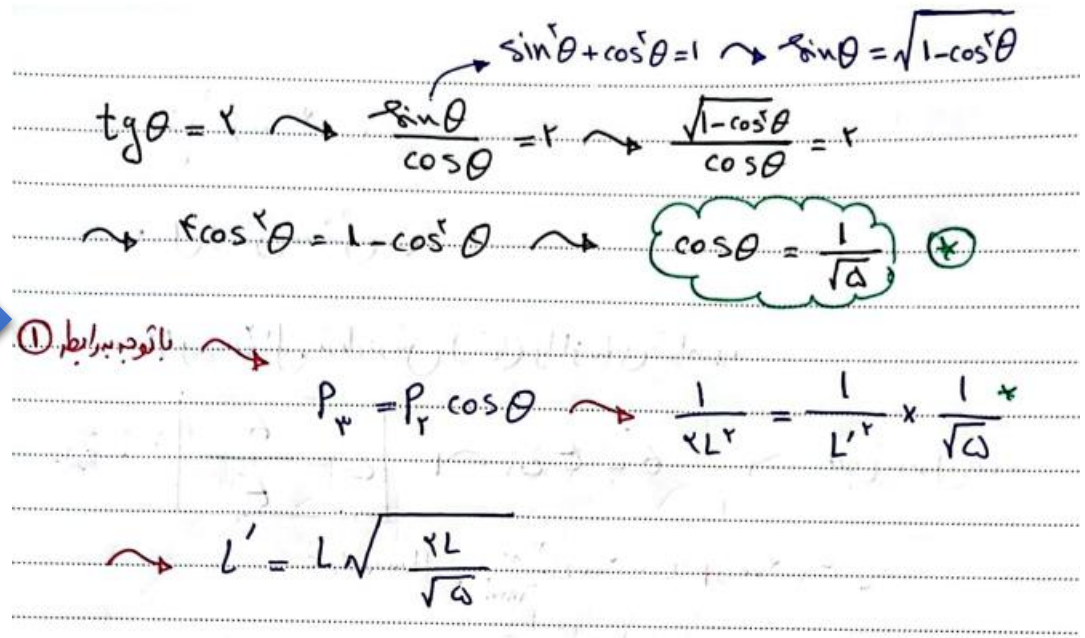


رابطه بار بحرانی شون ←

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(KL)^2}$$

شون با انتهای لیردار برابر $K = 1$


پس داریم
$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \sim \frac{1}{L^2}$
$P_2 = \frac{\pi^2 EI}{L'^2} \sim \frac{1}{L'^2}$
$P_3 = \frac{\pi^2 EI}{2L^2} \sim \frac{1}{2L^2}$
P_1
P_3
θ
P_2
$\sum F_x = 0 \rightarrow P_3 = P_2 \cos\theta$ (1)
$\sum F_y = 0 \rightarrow P_1 = P_2 \sin\theta$ (2)
$\frac{P_1}{P_3} = tg\theta$
$tg\theta = \frac{1/L^2}{1/2L^2}$
$tg\theta = 2$


$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$
$tg\theta = 2 \rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 \rightarrow \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = 2$
$\rightarrow 4\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (*)
با توجه به رابطه (1)
$P_3 = P_2 \cos\theta \rightarrow \frac{1}{2L^2} = \frac{1}{L'^2} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$ (*)
$\rightarrow L' = L\sqrt{\frac{2L}{\sqrt{5}}}$

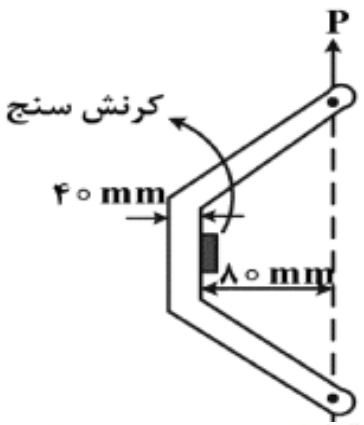
۷۴- اگر نیروی $P = ۸\ kN$ به یک میله فولادی $(E = ۲۰۰\ GPa)$ با مقطع مربعی به طول ضلع $۴۰\ mm$ وارد شود، کرنش‌سنج چه عددی را نشان می‌دهد؟

۱) $۰/۴ \times ۱۰^{-۶}$

۲) $۰/۴۵ \times ۱۰^{-۶}$

۳) ۴۰۰×۱۰^{-۶} ✓

۴) ۴۵۰×۱۰^{-۶}



در این سؤال مقدار کرنش (ε) را از ما می‌خواهد.

طبق قانون هوک $\rightarrow \sigma = E\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ (σ بر حسب $\frac{N}{mm^2}$)

داده مسأله: $E = ۲۰۰\ GPa = ۲۰۰ \times ۱۰^{۳}\ \frac{N}{mm^2}$

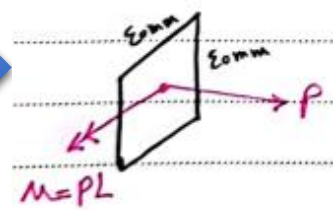
طبق رابطه فوق باید مقدار تنش را ($\frac{N}{mm^2}$) بدست آوریم. نیروی P در فاصله مشخص $L = ۸۰ + ۲۰\ mm$ وارد شده است.

$M = PL = ۱۰۰P$

$L = ۸۰ + ۲۰ = ۱۰۰\ mm$

P را به نقطه i منتقل کرده که لنگر M ایجاد می‌شود ← تنش از نوع مرکب بوده

مقطع مربعی



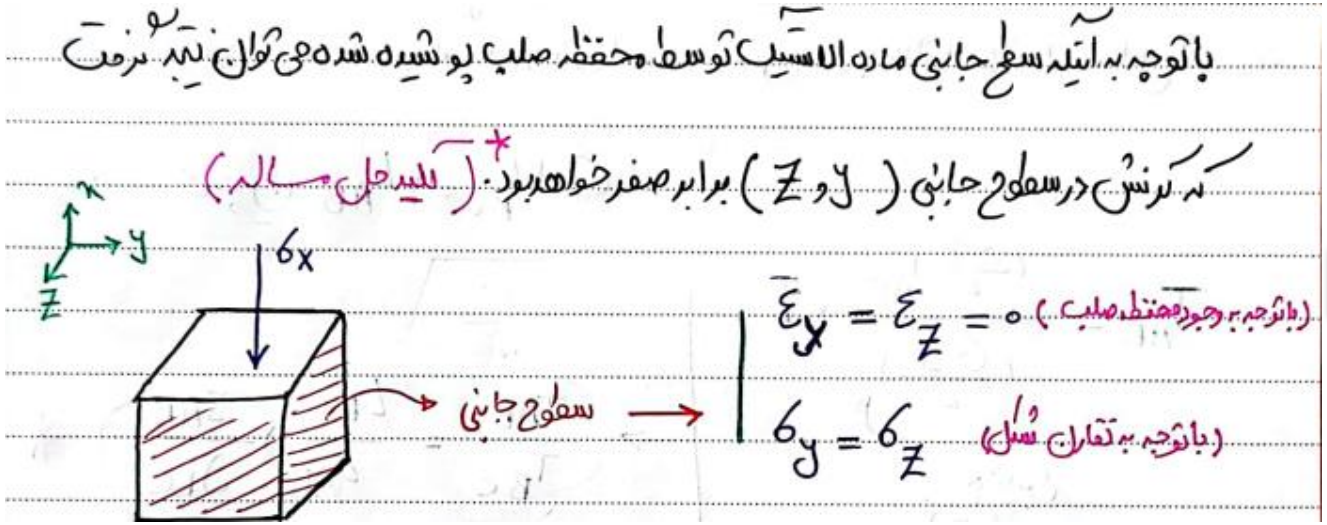
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{۸۰۰۰\ (N)}{۴۰ \times ۴۰\ (mm^2)} + \frac{۶ \times ۸۰۰۰ \times ۱۰۰}{(۴۰)^۳}$$

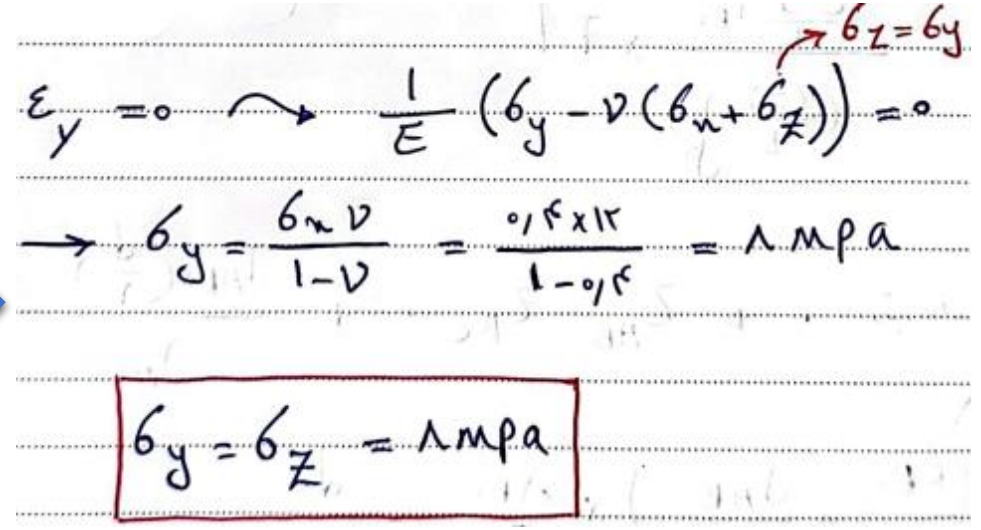
$$\sigma = ۸۰\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{۸۰}{۲۰۰ \times ۱۰^{۳}} = ۴۰۰ \times ۱۰^{-۶}$$

۷۵- در یک محفظه مکعب‌شکل صلب با ابعاد ۱۰۰ mm، ماده‌ای با ضریب پواسون ۰/۴ و مدول الاستیک ۵۰۰MPa قرارگرفته‌است. اگر بار یکنواخت اعمال‌شده از بالای محفظه تنش فشاری $\sigma_x = 12\,MPa$ ایجاد کند، مقدار تنش‌های ایجادشده جانبی (σ_y , σ_z) چند مگاپاسکال خواهد شد؟ (از اصطکاک صرف‌نظر شود.)

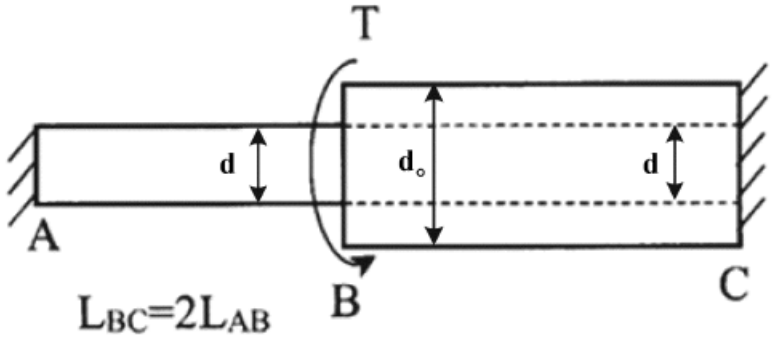
۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۸





۷۶- میله مرکب نشان‌داده‌شده با مقطع دایره‌ای، از دو بخش هم‌جنس توپر AB به قطر d و توخالی BC به قطر داخلی d و قطر خارجی $d_\circ$ که در مقطع B به‌صورت جبری به‌هم متصل هستند، تشکیل شده‌است. اگر تنش برشی حداکثر در تمام مقاطع میله یکسان باشد، نسبت $\frac{d_\circ}{d}$ کدام است؟ (T گشتاور پیچشی وارد به مقطع B است.)

۱) $\sqrt[4]{2}$
۲) $\sqrt[3]{2}$
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲ ✓



با توجه به صورت مساله، گفته شده است که تنش برشی حداکثر در تمام میله یکسان است و همچنین $L_{BC}=2L_{AB}$ است.

$$T_{AB}=\frac{(\frac{GJ}{L})_{AB}}{(\frac{GJ}{L})_{b'}}\times T \quad \text{(تابع)}$$

$$T_{BC}=\frac{(\frac{GJ}{L})_{BC}}{(\frac{GJ}{L})_{b'}}\times T \quad \text{(تابع)}$$

$$\frac{T_{AB}}{T_{BC}}=\frac{L_{BC}}{L_{AB}}\times\frac{J_{AB}}{J_{BC}} \quad (*)$$

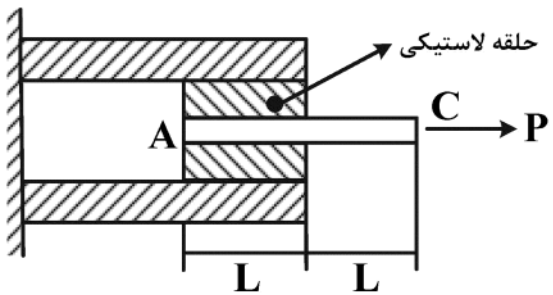
با توجه به صورت مساله $\tau_{AB}=\tau_{BC}$

$$\frac{T_{AB}\times(\frac{d}{2})}{J_{AB}}=\frac{T_{BC}(\frac{d_\circ}{2})}{J_{BC}}$$

$$(*)\rightarrow\left(\frac{L_{BC}}{L_{AB}}\times\frac{J_{AB}}{J_{BC}}\right)\times\frac{J_{BC}}{J_{AB}}=\frac{d_\circ}{d}$$

$$\frac{d_\circ}{d}=2$$

۷۷- میله توپر AC به قطر d و مدول یانگ E از طریق یک حلقه لاستیکی به مدول برشی G به یک استوانه صلب متصل‌شده‌است (محل اتصالات محکم است.) هرگاه میله تحت‌تأثیر نیروی محوری P قرار گیرد، افزایش طول میله کدام است؟



۱) $\frac{۴PL}{\pi d^۲E}$

۲) $\frac{۴PLG}{\pi d^۲E^۲}$

۳) $\frac{۶PL}{\pi d^۲E}$ ✓

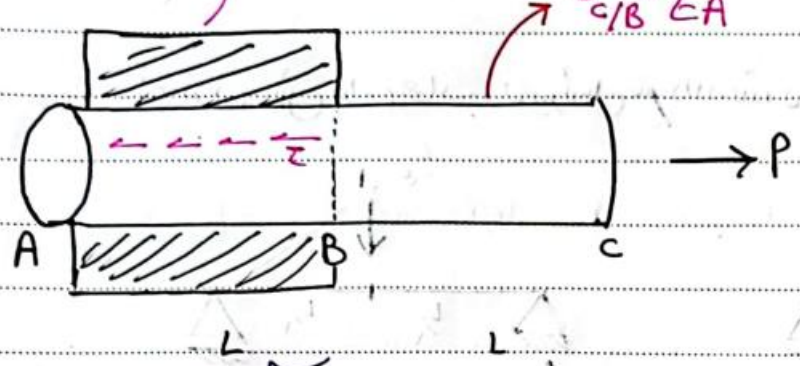
۴) $\frac{۶PLE}{\pi d^۲G^۲}$

پاسخ تشریحی ۳

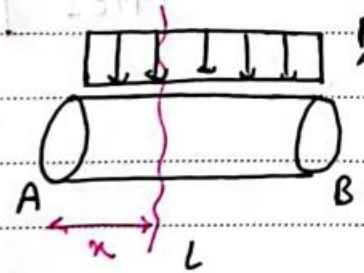
فصل (بارگذاری اعضای حجمی)

$\delta_{B/A} = \int_0^L \frac{P(x)}{EA} dx$

$\delta_{C/B} = \frac{PL}{EA}$



وقتی نیروی P (کششی) به میله AC وارد می‌شود، با توجه به حضور جکه لاستیکی در قسمت AB باعث ایجاد تنش برشی ($\tau = \frac{P}{L} \leftarrow \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} = \text{تنش برشی}$) به صورت گسترده در این قسمت می‌گردد. فقط کافی است $P(x)$ در محدوده AB تعیین شود سپس با نوشتن رابطه سازگاری، δ_c بدست می‌آید.



$P(x) = \frac{P \times x}{L}$

رابطه سازگاری $\rightarrow$ $\delta_c = \delta_{c/B} + \delta_{B/A} = \frac{PL}{EA} + \int_0^L \frac{(Px/L)}{EA} dx$

$\delta_c = \frac{3Pl}{2EA} = \frac{3Pl}{2E(\frac{\pi}{4}d^2)} = \boxed{\frac{6Pl}{E\pi d^2}}$

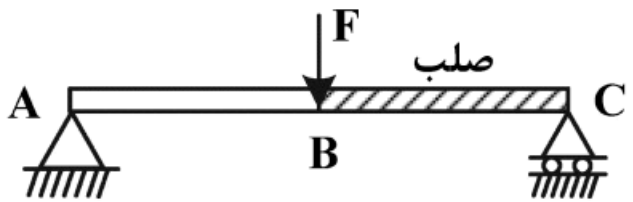
۷۸- نیروی F به وسط تیر یک پارچه ABC به طول L وارد می‌شود. اگر مدول خمشی بخش AB برابر EI و بخش BC تیر صلب باشد، خیز نقطه B کدام است؟

۱) $\frac{FL^3}{48EI}$

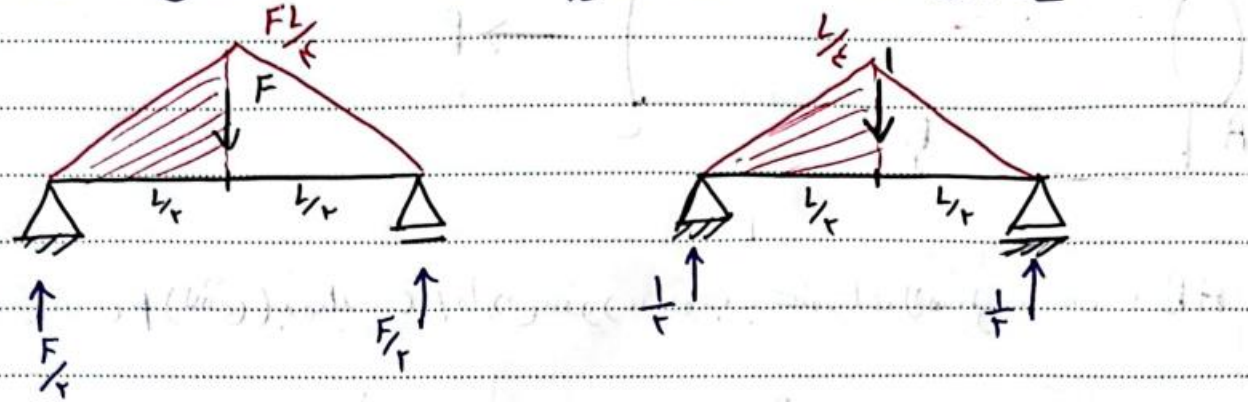
۲) $\frac{FL^3}{96EI}$

۳) $\frac{FL^3}{144EI}$

۴) $\frac{FL^3}{192EI}$

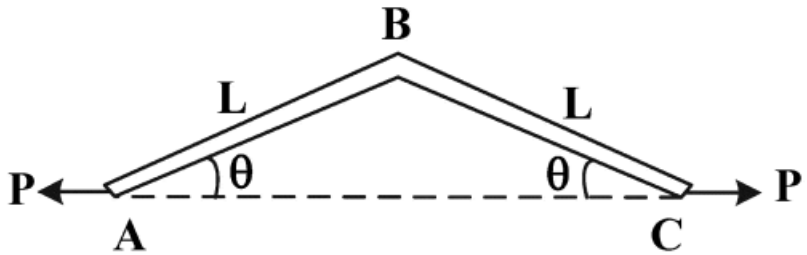


بهترین روش برای محاسبه تغییر شکل تیر داده شده استفاده از روش کار مجازی است.



$$(\Delta_{VB}) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{FL}{4}\times\frac{L}{2}\times\frac{2}{3}\left(\frac{L}{4}\right)}{EI} = \frac{FL^3}{96EI}$$

۷۹- باز شدگی نقاط A و C نسبت به یکدیگر در عضو خمیدهٔ شکل زیر کدام است؟ (EI ثابت است و سطح مقطع میله‌ها A فرض می‌شود. فقط اثر خمش و کشش درنظر گرفته شود.)



(۱) $\frac{۲PL^۳\sin^۲\theta}{۳EI}+\frac{۲PL\cos^۲\theta}{EA}$

(۲) $\frac{۲PL^۳\cos^۲\theta}{۳EI}+\frac{۲PL\sin^۲\theta}{EA}$

(۳) $\frac{۲PL^۳\cos^۲\theta}{۳EI}+\frac{۲PL\cos^۲\theta}{EA}$

(۴) $\frac{۲PL^۳\sin^۲\theta}{۳EI}+\frac{۲PL\sin^۲\theta}{EA}$