

طایفه بود بی‌شک معادلات روی ریاضیات  
سریه کناره‌های می‌گردد

پاسخ: محضر شاه‌ابراهیم

سوالات قابل تدریس: (۱) تست معادلات (۲) تست ریاضیات (۳) تست ریاضیات  
(باتوجه به شرایط حل) نکته‌ای که بارها عرض کردم

ریاضیات (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، ریاضی مهندسی):

۲۶- (معملاً - متوط) فرض کنید به ازای عدد حقیقی  $\alpha > 0$ ، یکی از ریشه‌های معادله  $(2+i)z^2 - 2\sqrt{2}\alpha z - i + 2 = 0$  حقیقی باشد.

مقدار  $\alpha$ ، کدام است؟  
 $z = x + iy \rightarrow (2+i)(x+iy)^2 - 2\sqrt{2}\alpha(x+iy) - i + 2 = 0$

$\rightarrow 2x^2 + 4xyi - 2y^2 + ix^2 - 2ny - iy^2 - 2\sqrt{2}\alpha x - 2\sqrt{2}\alpha iy + 2 = 0$

$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 - 2ny - 2\sqrt{2}\alpha x + 2 = 0 \\ 4xy + x^2 - y^2 - 2\sqrt{2}\alpha y - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}\alpha x + 1 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳)  $\sqrt{2}$
- (۴)  $2\sqrt{2}$

$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2}\alpha + 1 &= 0 \\ \sqrt{2}\alpha &= 2 \\ \alpha &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$

۲۷- (محد-تست) اگر  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^A$ ، آنگاه مقدار  $A$  کدام است؟

$2^x = e^{x \ln 2} \approx 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2}$

$= \ln \left( \frac{1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2} + 1 - x \ln 2 + 1 + x - 3}{x} \right) = 1 \rightarrow e$

$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} - 1 \right) \frac{1}{x}}$

$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 2^{-x} + e^x - 3}{x} - 1 \right) \frac{1}{x} = \frac{1}{2} (\ln 2) + 1$

و (۱-۲)  $e$  هم (۳) معروف  $\infty$

(۱) صفر  
(۲)  $(\ln 2)^2 + \frac{1}{2}$

(۳)  $(\ln 2) + \frac{1}{2}$

(۴)  $\frac{1}{2} (\ln 2) + 1$

$= \ln 2 + \frac{1}{2}$

۲۸- فرض کنید  $f_1 = 1, f_2 = 2, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n (n \in \mathbb{N})$  مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$  کدام است؟

نسبت طلایی

نسبت فیبوناچی

- (۱)  $\frac{5}{4}$
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- (۴)  $\sqrt{3}$

(۱) یا بلدی ریاضی  
(۲) یا بلدی ریاضی

من مؤیدم ران به دیدیم این سوال نکته یا ساره؟

☺

۲۹- مقدار تقریب خطی  $\sqrt{3(1/1)^2 - 2e^{-0/1}}$  کدام است؟

مستقیم (متوسط)

$$y = \sqrt{3x^2 - 2e^{-x}} \quad \begin{cases} x=1 \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 2e^{-x}}{2\sqrt{3x^2 - 2e^{-x}}} \rightarrow y'(1) = \frac{2+2}{2} = \frac{11}{2}$$

۱,۰۳ (۱)

۱,۰۵ (۲)

۱,۲۵ (۳)

۱,۵۵ (۴)

$$y = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow y = y'(x - x_0) + y_0 = \frac{11}{2}(1) + 1 = 1.55$$

۳۰- فرض کنید  $u = u(x, y)$  و  $v = v(x, y)$  در دستگاه  $\begin{cases} e^{2u-1} - 4vx = y \\ \cos(\pi u) - y \sin(\pi v) = x^2 \end{cases}$  به ازای  $u \geq 0$  و  $1 < v \leq 2$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} 2e^{2u-1} \frac{\partial u}{\partial x} - 4v - 4x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ -\pi \sin(\pi u) \frac{\partial u}{\partial x} - y \pi \cos(\pi v) \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \end{cases}$$

صادق باشند. مقدار  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$  کدام است؟

$$\begin{cases} e^{2u-1} = 1 \rightarrow u = \frac{1}{2} \\ v = 2 \end{cases}$$

۴ (۱)

۱/۴ (۲)

-۱/۴ (۳)

-۴ (۴)

مستقیم (متوسط)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 4v & -4x \\ 2x & -y\pi\cos(\pi v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^{2u-1} & -4x \\ -\pi\sin(\pi u) & -y\pi\cos(\pi v) \end{vmatrix}} = \frac{-4y\pi v \cos(\pi v) + 8x^2}{-2e^{2u-1} y \pi \cos(\pi v) - 4x \pi \sin(\pi u)} = \frac{-8\pi}{-2\pi} = 4$$

۳۱- فرض کنید  $f(x+y, x-y) = \int_{fx}^{fy} \frac{\ln t}{t} dt$  مقدار  $\frac{\partial f}{\partial y}(e, 0)$  کدام است؟

تقریب مستقیم (متوسط)

$$f \left( \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f_u \cdot (1) + f_v \cdot (-1) = f_u - f_v$$

$$\begin{cases} u+v=2x \\ u-v=2y \end{cases}$$

۸/e (۱)

صفر (۲)

۴/e (۳)

$$f = \int_{u-v}^{u+v} \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln(t) \Big|_{u-v}^{u+v} = \frac{1}{2} [\ln(u+v) - \ln(u-v)]$$

طراحی عددی  
بیج کرده

با استفاده از تقریب مستقیم

$$\frac{1}{2} [4] \left[ \frac{2 \ln(u-v)}{u-v} \times 2 + 0 - 0 \right] = 8 \frac{\ln(u-v)}{u-v} = \frac{8 \ln(2y)}{2y} = \frac{4}{y} \ln(2y)$$

$$\left. \begin{cases} x=y=e/2 \\ u-v=8/e \end{cases} \right\} \frac{4}{e} (1 + \ln 2) \quad (4)$$

۳۲- فرض کنید C منحنی بسته با ضابطه  $r = \cos \theta$  در مختصات قطبی در جهت مثبت باشد. مقدار  $\oint_C (xy^2 dy - x^2 y dx)$

مستقیم (متوسط)

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\begin{cases} r^2 = r \cos \theta \\ x^2 + y^2 = r \end{cases}$$



کدام است؟

3/32 pi (۱)

3/16 pi (۲)

صفر (۳)

-3/16 pi (۴)

$$= \iint (y^2 + x^3) dA$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\cos \theta} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \cos^4 \theta d\theta$$

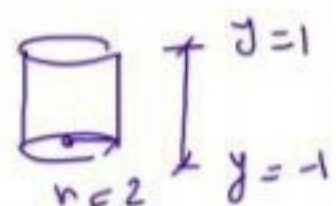
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{16}$$

۳۳- فرض کنید S یک تور به شکل سطح خارجی استوانه  $x^2 + z^2 = 4$  و صفحات  $y = 1$  و  $y = -1$  باشد و در رودی قرار داشته باشد که میدان بردارهای سرعت جریان آب در آن  $\vec{F} = (x, x, y)$  است. شار عبوری از تور، کدام است؟

رودرانی  
(ساره)

$div \vec{F} = 1 + 0 + 0 = 1$

$= \iiint_V div \vec{F} dV = \iiint_V dV$   
حتی نیازی به حل آنرا نیست



$V = \pi r^2 h = \pi (2)^2 (2) = 8\pi$

- ۵π (۱)
- ۶π (۲)
- ۸π (۳)
- ۱۰π (۴)

۳۴- مقدار  $\iiint_R (3 - x^2 + \sin z) dV$  که R ناحیه محصور به داخل کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  می باشد، کدام است؟

استرال سگانه  
(ساره)

$= 3 \iiint dV - \iiint x^2 dV + \iiint \sin z dV$   
صفر = تابع فرد و بازه متقارن

$= 3 (V) = 3 \times \frac{4}{3} \pi (2)^3 = 32\pi$

- ۴π (۱)
- ۸π (۲)
- ۱۶π (۳)
- ۳۲π (۴)

۳۵- کوتاه ترین فاصله نقطه  $(1, 1, 0)$  از سهمی گون  $z = x^2 + y^2$  کدام است؟

توابع صند تیز  
(سقوط)

$L = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z)$

$2z - \lambda = 0 \rightarrow z = \frac{\lambda}{2}$

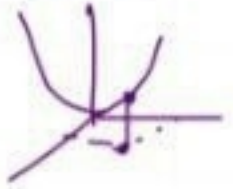
$L_x = 2(x-1) + 2x + 2\lambda = 0$

$L_y = 2(y-1) + 2y + 2\lambda = 0$

$L_z = 2z - \lambda = 0 \rightarrow 2x - 2 + 4xz = 0$

$2x - 2 + 8x^3 = 0 \rightarrow 4x^3 + x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/2 \rightarrow y = 1/2 \rightarrow z = 1/2$

- ۳ (۱)
- $\sqrt{3}$  (۲)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)
- $\frac{3}{4}$  (۴)



$d = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$

۳۶- معادله دیفرانسیل  $x^2 y''(x) + p(x)y'(x) + x^2 y(x) = 0$ ;  $x > 0$  را در نظر بگیرید. با استفاده از تغییر متغیر  $z = f(x)$  معادله را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می کنیم. p(x) کدام است؟ (فرض کنید  $f'(x) > 0$ )

تغییر متغیر  
(نکت)

$z = f(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y'_z f'(x)$

$\rightarrow y'' = \frac{d}{dx} (y'_z f') = \frac{d}{dz} (y'_z f') \cdot \frac{dz}{dx} = y''_z f'^2 + y'_z f''$

$\rightarrow x^2 y'' + p y' + x^2 y = 0 \rightarrow x^2 (y''_z f'^2 + y'_z f'') + p (y'_z f') + x^2 y = 0$

$f' = cx \rightarrow f'' = c$

- $-x^2 + 2x$  (۱)
- $-x^2 - x^2$  (۲)
- $2x^2 - x$  (۳)
- $x^2 + x$  (۴)

۳۷- معادله دیفرانسیل  $x^2 y''(x) - x^2 y'(x) + 2xy' - 2y = 0$ ;  $x > 0$  با شرایط نامتعارف  $y(1) = y'(1) = y''(1)$  و  $y'(e) = ?$  را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی جواب  $y(x)$  در  $x = e$ ، کدام است؟

کوس اریتر  
نقطه

$m(m-1)(m-2) - m(m-1) + 2m - 2 = 0$

$m(m-1)(m-3) + 2(m-1) = 0$

$(m-1)(m(m-3) + 2) = 0 \rightarrow (m-1)(m^2 - 3m + 2) = 0$

$y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x^2$

$y'(e) = 0 + -1 \ln e - 1 + 2e = -2 + 2e = 2(e-1)$

$y(1) = C_1 + C_3$

$C_1 + C_3 = 1 + C_2 + 2C_3 = C_2 + 2C_3 \rightarrow C_1 = 0, C_2 = -C_3$

$C_3 = 1, C_2 = -1$

$y' = C_1 + C_2 \ln x + C_2 + 2C_3 x$

$\rightarrow y'' = \frac{C_2}{x} + 2C_3 \rightarrow y''(1/3) = -1 = 3C_2 + 2C_3$

$y'(1) = C_1 + C_2 + 2C_3$

$y''(1) = C_2 + 2C_3$

- $e^{-1}$  (۱)
- $e+1$  (۲)
- $2(e-1)$  (۳)
- $2(e+1)$  (۴)

کوس اریتر (نکت)