پاسخنامه تشریحی

سؤالات مقاومت مصالح

کنکور کارشناسی ارشد

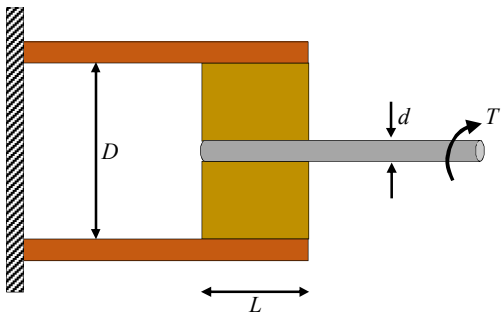
مهندسی مکانیک ۱۴۰۱

تهیه و تنظیم

پیمان رجائیان

بسم الله الرحمن الرحیم

۷۷- هرگاه میله صلبی به قطر d از طریق یک حلقه لاستیکی با مدول برشی G به استوانه توخالی صلب با قطر داخلی D محکم شده باشد، زاویه چرخش محل اعمال گشتاور پیچشی T کدام است؟



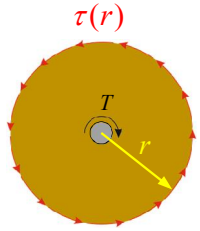
۱) $\varphi=\dfrac{\pi^2 T}{LG}\left(\dfrac{1}{d^2}-\dfrac{1}{D^2}\right)$

۲) $\varphi=\dfrac{T}{\pi LG}\left(\dfrac{1}{d^2}-\dfrac{1}{D^2}\right)$

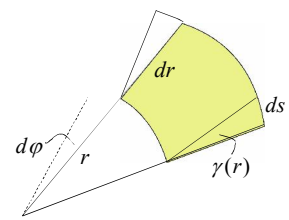
۳) $\varphi=\dfrac{TL}{\pi G}\left(\dfrac{1}{d^4}-\dfrac{1}{D^4}\right)$

۴) $\varphi=\dfrac{4T}{\pi LG}\left(\dfrac{1}{d^2}-\dfrac{1}{D^2}\right)$

حل: گزینه «۲» صحیح است.



زاویه پیچش محور نسبت به استوانه برابر است با زاویه پیچش نسبی وجوه داخلی و خارجی حلقه لاستیکی



$$\sum T=\circ \rightarrow \tau(r)\times 2\pi r\times L\times r=T \rightarrow \tau(r)=\frac{T}{2\pi r^2 L}$$

$$\gamma(r)=\frac{\tau(r)}{G}=\frac{T}{2\pi r^2 LG}$$

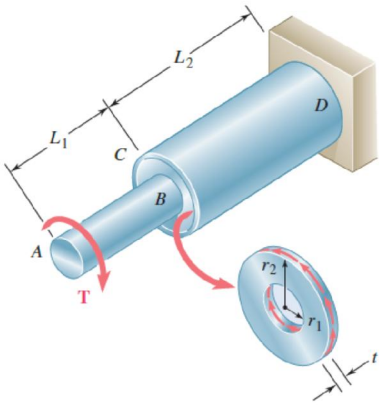
$$ds=\gamma(r)dr=rd\varphi \rightarrow d\varphi=\frac{\gamma(r)dr}{r} \rightarrow \varphi=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma(r)dr}{r}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{Tdr}{2\pi r^3 LG}$$

$$\rightarrow \varphi=\frac{T}{2\pi LG}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^3}=\frac{T}{2\pi LG}\left(-\frac{1}{2r^2}\right)_{r_1}^{r_2}=\frac{T}{4\pi LG}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\xrightarrow{r_1=\frac{d}{2},r_2=\frac{D}{2}}\varphi=\frac{T}{\pi LG}\left(\frac{1}{d^2}-\frac{1}{D^2}\right)$$

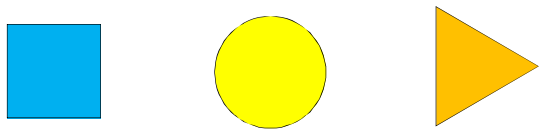
توضیح: این تست شبیه تست 3.63 فصل پیچش کتاب Beer Johnston می‌باشد.

3.63 An annular plate of thickness t and modulus G is used to connect shaft AB of radius r_1 to tube CD of radius r_2. Knowing that a torque **T** is applied to end A of shaft AB and that end D of tube CD is fixed, (*a*) determine the magnitude and location of the maximum shearing stress in the annular plate, (*b*) show that the angle through which end B of the shaft rotates with respect to end C of the tube is

$$\phi_{BC}=\frac{T}{4\pi Gt}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)$$



۷۸- شکل‌های نشان داده شده، همگی هم مساحت بوده و به عنوان مقطع تیر تحت خمش حول محور افقی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بیشترین مدول مقطع، مربوط به کدام مقطع است؟



۱) دایره

۲) مثلث متساوی‌الاضلاع

۳) مربع

۴) هر سه شکل مدول مقطع یکسانی دارند.

حل: گزینه «۳» صحیح است.

بعد مربع، شعاع دایره و بعد مثلث متساوی‌الاضلاع را به‌ترتیب با a، R و b نشان می‌دهیم.

$$A = a^2 = \pi R^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{A} \\ R = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}} \\ b = \dfrac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$$

با توجّه به اینکه هر سه مقطع، چندضلعی منتظم می‌باشند، همه محورهای عبوری از مرکز سطح مقطع، محور اصلی بوده و ممان اینرسی حول همه محورها با هم برابر است.

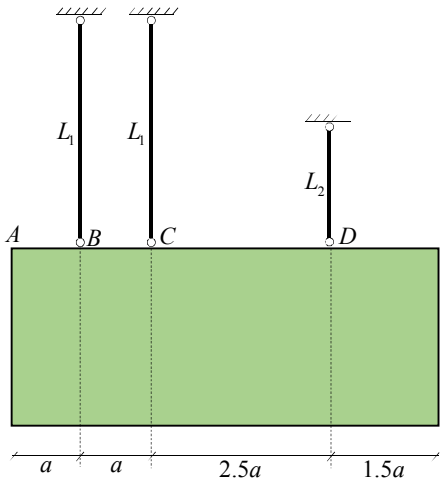
$$S_S = \frac{a^3}{6} = \frac{A\sqrt{A}}{6} \simeq 0.17 A\sqrt{A}$$

$$S_C = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{A}{\pi}\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right) = \frac{A\sqrt{A}}{4\sqrt{\pi}} \simeq 0.14 A\sqrt{A}$$

$$I_T = \frac{\sqrt{3}}{96} b^4 = \frac{\sqrt{3}}{96}\left(\frac{4A}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{18} A^2 \rightarrow S_T = \frac{I_T}{c} \xrightarrow{c=\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}} S_T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{18} A^2}{\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{18} A\sqrt{A} \simeq 0.13 A\sqrt{A}$$

$$\rightarrow S_S > S_C > S_T$$

۷۹- تابلوی مستطیلی یکنواخت از سه سیم هم‌جنس و هم‌مقطع آویخته شده است. نسبت $\frac{L_2}{L_1}$ برای اینکه تابلو افقی بماند، کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$

۲) 1

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{3}{4}$

حل: گزینه «۳» صحیح است.

توضیح: با توجّه به اینکه سطح مقطع و جنس کابلها یکسان است، نتیجه می گیریم که صلبیت محوری(EA) آنها با یکدیگر برابر بوده ولی از آنجا که طول یکی از کابلها متفاوت است، سختی محوری $\left(\frac{EA}{L}\right)$ آن متفاوت است. برای آنکه تابلو پس از جابجایی، افقی بماند، می‌بایست نیرو (وزن تابلو) در مرکز سختی[1] مجموعه وارد شود تا کابلها مانند فنرهای موازی رفتار کرده و جابجایی آنها با یکدیگر برابر باشد. از آنجا که توزیع جرم تابلو یکنواخت است (همگن است)، مرکز جرم[2] و مرکز سطح[3] آن بر هم منطبق هستند، بنابراین نیرو (وزن تابلو) در مرکز سطح آن قرار می‌گیرد و برای اینکه تابلو افقی بماند، مرکز سختی می‌بایست بر مرکز سطح منطبق شود.

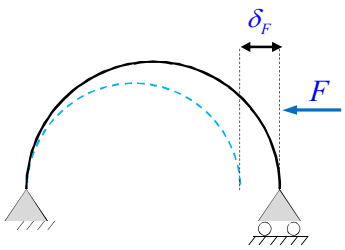
$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}=\frac{\frac{AE}{L_1}\times a+\frac{AE}{L_1}\times 2a+\frac{AE}{L_2}\times 4.5a}{2\frac{AE}{L_1}+\frac{AE}{L_2}}\xrightarrow{Simplified}\bar{x}=\frac{3aL_2+4.5aL_1}{L_1+2L_2}$$

$$No\ rotation\rightarrow\bar{x}=x_{Centroid}\rightarrow\frac{3aL_2+4.5aL_1}{L_1+2L_2}=3a$$

$$\rightarrow 3L_2+4.5L_1=3L_1+6L_2\rightarrow 3L_2=1.5L_1\rightarrow\frac{L_2}{L_1}=\frac{1}{2}$$

[1] Center of stiffness
[2] Center of mass
[3] Center of area (Centroid)

۸۰- تیر نیم‌دایره با مدول خمشی EI و شعاع R تحت نیروی F مطابق شکل قرار دارد. نیروی F چقدر باشد تا جابجایی تیر در امتداد F برابر $\delta_F = \frac{R}{10}$ شود؟

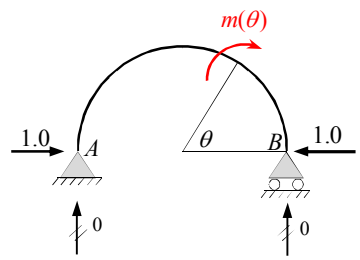


۱) $\frac{EI}{10R^2}$ ۲) $\frac{2EI}{5R^2}$

۳) $\frac{2EI}{5\pi R^2}$ ۴) $\frac{EI}{5\pi R^2}$

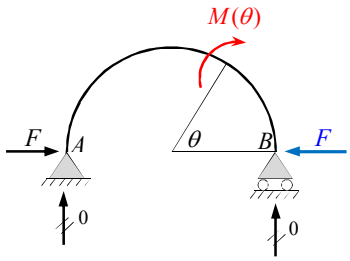
حل: گزینه «۴» صحیح است.

راه حل اوّل: استفاده از روش کارمجازی[1]



سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

$$m(\theta) = -R\sin\theta$$



سازه تحت بارگذاری حقیقی

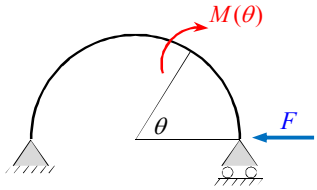
$$M(\theta) = -FR\sin\theta$$

$$1\times\Delta = \int_L \frac{m(\theta)M(\theta)ds}{EI}$$

$$\rightarrow 1\times\delta_{HB} = \int_0^{\pi}\frac{(-R\sin\theta)(-FR\sin\theta)Rd\theta}{EI} = \frac{FR^3}{EI}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{F\pi R^3}{2EI} = \frac{R}{10} \rightarrow F = \frac{EI}{5\pi R^2}$$

راه حل دوم: استفاده از روش انرژی (قضیه دوم کاستیلیانو[2])

درسنامه: قضیه دوم کاستیلیانو که فقط برای سازه با رفتار خطی مطرح می‌شود، بیان می‌کند که مشتق جزئی انرژی کرنشی نسبت به هر نیرو، برابر است با تغییرمکان متناظر آن نیرو.



$$M(\theta) = -FR\sin\theta$$

$$U = \int_L \frac{M^2 ds}{2EI}$$

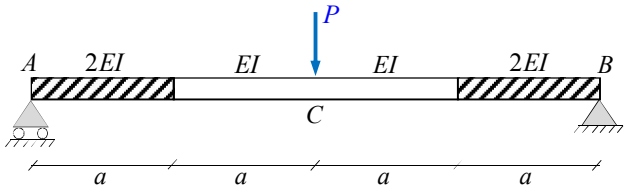
$$\frac{\partial U}{\partial F} = \int_L \frac{M\frac{\partial M}{\partial F}ds}{EI} = \int_0^{\pi}\frac{(-FR\sin\theta)(-R\sin\theta)Rd\theta}{EI} = \frac{FR^3}{EI}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{F\pi R^3}{2EI}$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F\pi R^3}{2EI} = \delta_F = \frac{R}{10} \rightarrow F = \frac{EI}{5\pi R^2}$$

☹ نقد: با احترام کامل به طرّاح، عبارت"مدول خمشی" در صورت تست یک اشتباه رایج در ادبیات فنی است. به جای آن می‌بایست از عبارت "صلبیت خمشی" که معادل فارسی عبارت Flexural rigidity می‌باشد، استفاده شود.

[1] Virtual work method
[2] Castigliano's second theorem

۸۱- نیروی P به نقطه C از تیر زیر وارد می‌شود. خیز تیر در C کدام است؟ (صلبیت خمشی قسمت هاشورخورده دو برابر صلبیت خمشی قسمت هاشورنخورده است)



۱) $\frac{5}{8}\frac{Pa^3}{EI}$

۲) $\frac{5}{4}\frac{Pa^3}{EI}$

۳) $\frac{3}{4}\frac{Pa^3}{EI}$

۴) $\frac{3}{8}\frac{Pa^3}{EI}$

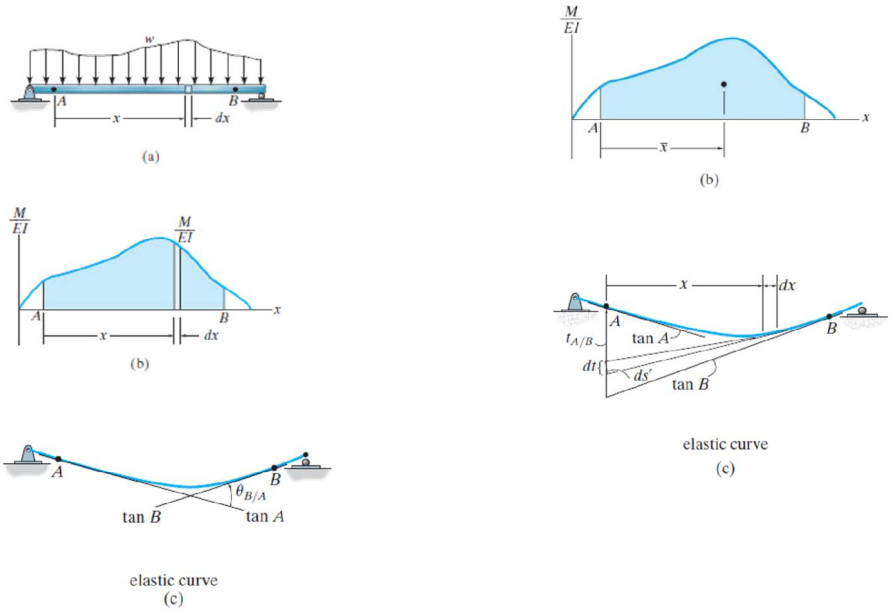
حل: گزینه «۲» صحیح است.

برای حل تست از روش لنگر سطح[1] استفاده می‌نماییم.

درسنامه:

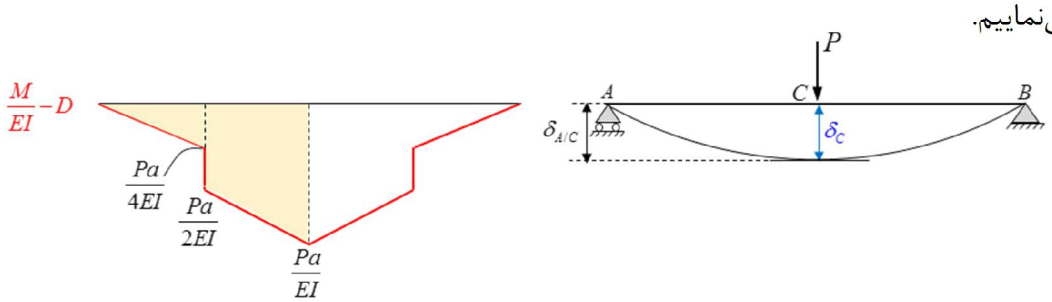
قضیه اوّل لنگر سطح: زاویه بین مماسهای مرسوم بر دو نقطه A و B از منحنی تغییرشکل الاستیک یک تیر برابر است با مساحت سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ بین آن دو نقطه.

قضیه دوم لنگر سطح: فاصله قائم بین نقطه A از یک تیر تا مماس رسم شده از نقطه B روی منحنی تغییرشکل الاستیک یک تیر برابر است با ممان استاتیک سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ تیر بین دو نقطه A و B نسبت به نقطه A



[1] Moment area method

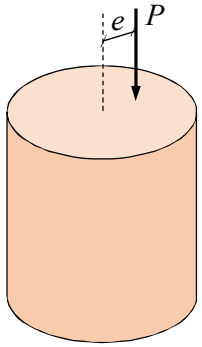
با توجّه به مطالب مطرح شده، نمودار $\frac{M}{EI}$ را مطابق شکل رسم نموده و از قضیه دوم لنگر سطح استفاده می‌نماییم.



$$\delta_C = t_{A/C} = \frac{A_m}{EI}\bar{x} = \frac{1}{2}\times\frac{Pa^2}{4EI}\times\frac{2a}{3}+\frac{Pa^2}{2EI}\left(a+\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{Pa^2}{2EI}\left(a+\frac{2a}{3}\right)$$

$$\rightarrow \delta_C = \frac{Pa^3}{12EI}+\frac{3Pa^3}{4EI}+\frac{5Pa^3}{12EI}=\frac{5Pa^3}{4EI}$$

۸۲- میله با مقطع دایره توپر به قطر d تحت اثر نیروی محوری فشاری خارج از مرکز P با خروج از مرکز e قرار دارد. حداکثر مقدار e برای آنکه تنش در هیچ نقطه‌ای از مقطع میله، کششی نشود، کدام است؟



۱) $\frac{d}{2\pi}$

۲) $\frac{d}{\pi}$

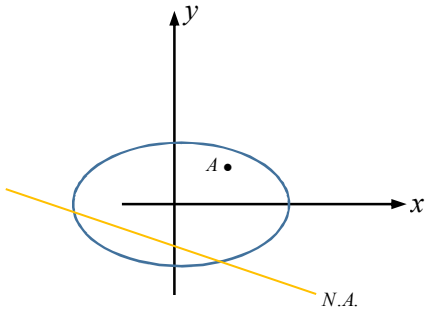
۳) $\frac{d}{8}$

۴) $\frac{d}{4}$

حل: گزینه «۳» صحیح است.

درسنامه:

هسته مقطع[1]: در مقطع زیر اگر بار محوری P در نقطه A اعمال شود، محور خنثی به‌صورت نشان داده شده خواهد بود. اگر نقطه A در ربع اوّل باشد، محور خنثی در ربع سوم واقع می شود و چنانچه نقطه A در ربع دوم باشد، محور خنثی در ربع چهارم قرار می‌گیرد. اگر بار P از مرکز مقطع دور شود، محور خنثی به مرکز مقطع نزدیک می‌شود و چنانچه بار دقیقاً در مرکز مقطع وارد شود، محور خنثی به بینهایت م ی‌رود.



اگر بار P از مرکز مقطع دور شود، نقطه‌ای وجود دارد که با اعمال بار در آن نقطه، محور خنثی بر مقطع مماس می‌شود. مجموعه نقاطی که اگر بار P در آنها وارد شود، محور خنثی بر مقطع مماس شود، سطحی را مشخص می‌کنند که به آن هسته مقطع گفته می‌شود. چنانچه بار در هسته مقطع اعمال شود، تنش در مقطع تغییر علامت نمی‌دهد. هسته مقطع از خصوصیات مقطع است و ثابت می‌شود که همواره محدب است. در مبحث هسته مقطع نکات زیادی وجود دارد که به مهمترین آنها اشاره می‌نماییم.

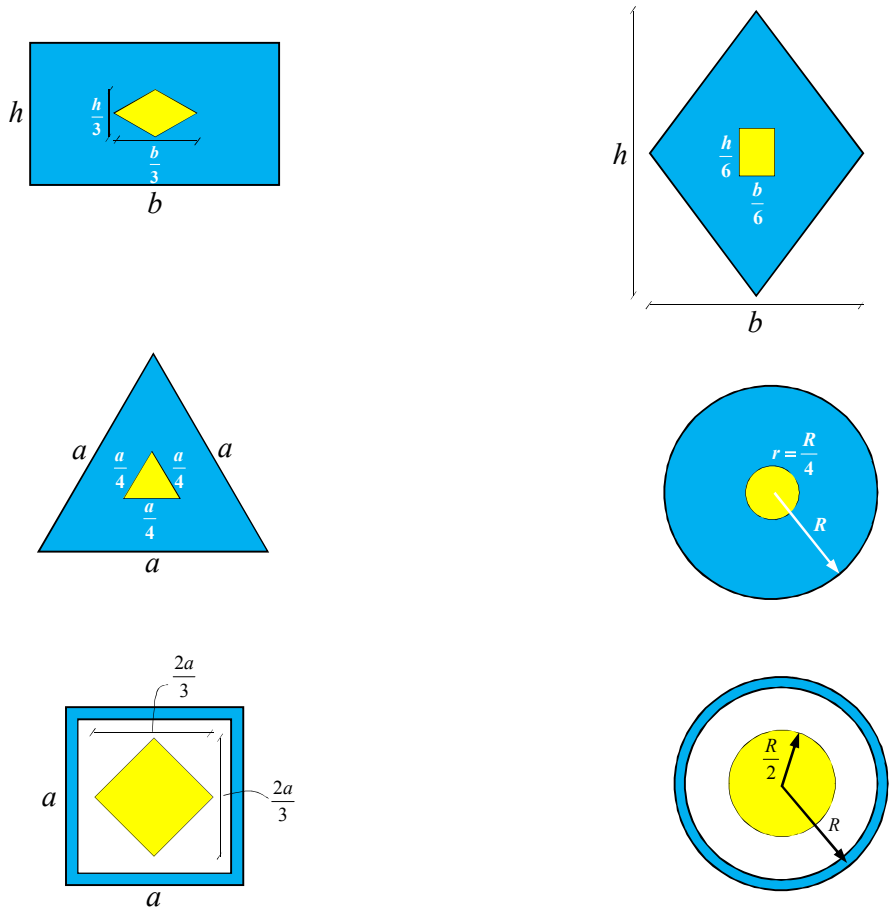
- اگر نیرو روی مرز هسته وارد شود، تنش تنها در یک رأس محیط مقطع صفر خواهد شد ولی اگر نیرو در یکی از رئوس هسته اعمال شود، تنش در یک ضلع محیط مقطع صفر خواهد شد.

- جابجایی نیروی محوری و محور خنثی سازگاری نداشته بطوریکه با نزدیک شدن یکی از آنها به مرکز مقطع، دیگری دور می‌شود.

[1] Kern

- اگر نیروی محوری در مرکز مقطع اعمال شود، مقطع تحت اثر تنش محوری خالص قرار گرفته و محور خنثی به بینهایت می‌رود. چنانچه نیروی محوری به فاصله بینهایت برود مقطع تحت اثر خمش خالص قرار گرفته و محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

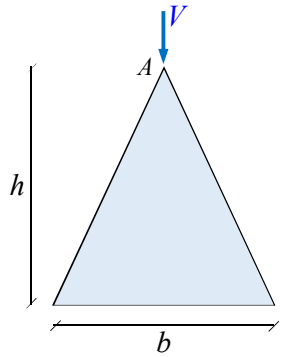
هسته مقاطع مهم در زیر آورده شده است. (منبع: کتاب جامع مقاومت مصالح آقای دکتر نادر فنائی)



حل تست: چنانچه بار در فاصله e از مرکز دایره (مرز هسته) قرار گیرد، محور خنثی بر محیط دایره مماس شده و تنش روی آن صفر خواهد شد.

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = -\frac{P}{\pi R^2} + \frac{(Pe)R}{\frac{\pi R^4}{4}} = \circ \rightarrow \frac{4e}{R} = 1 \rightarrow e = \frac{R}{4} = \frac{d}{8}$$

۸۳- مقطعی از یک تیر به شکل مثلث متساوی‌الساقین با ارتفاع h و قاعده b، تحت نیروی برشی V قرار دارد. نسبت تنش برشی در تاری به فاصله $\frac{h}{2}$ از رأس مثلث (A) به تنش برشی در محل تار خنثی چقدر است؟



۱) 1.125

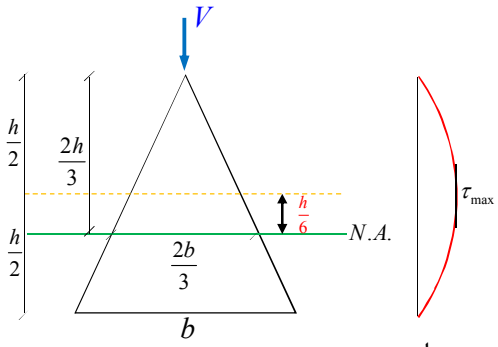
۲) 0.875

۳) 2.25

۴) 1

حل: گزینه «۱» صحیح است.

ثابت می‌شود که در مقطع مثلثی تحت اثر برش عمود بر قاعده مقطع، تنش برشی ماکزیمم در فاصله $\frac{h}{6}$ بالای محور خنثی که همان وسط ارتفاع مقطع است بوجود می‌آید و مقدار آن 1.5 برابر تنش برشی متوسط مقطع است. $\frac{\tau_{\max}}{\tau_{ave}}=1.5$



حال به محاسبه تنش برشی در محل محور خنثی می‌پردازیم.

$$\tau_{N.A}=\frac{VQ_{N.A.}}{It}=\frac{V\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2b}{3}\times\frac{2h}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{2h}{3}\right)}{\frac{bh^3}{36}\times\frac{2b}{3}}=\frac{36\times2\times2}{2\times3\times3\times3}\frac{V}{bh}=\frac{8}{3}\frac{V}{bh}=\frac{4}{3}\frac{V}{\frac{bh}{2}}=\frac{4}{3}\tau_{ave}$$

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{N.A.}}=\frac{1.5\tau_{ave}}{\frac{4}{3}\tau_{ave}}=\frac{9}{8}=1.125$$

نکته: در مقطع لوزی شکل که تغییرات پهنا و ارتفاع به‌صورت شدید و خطی است، تنش برشی در محل محور خنثی ایجاد نمی‌شود. ثابت می‌شود که در مقطع لوزی شکل، تنش برشی ماکزیمم در فاصله $\frac{h}{8}$ بالا و پایین محور خنثی بوجود می‌آید و مقدار آن برابر $\frac{9}{8}$ تنش برشی متوسط مقطع است. $\frac{\tau_{\max}}{\tau_{ave}}=\frac{9}{8}$

می‌توان نشان داد که در مقطع لوزی، تنش برشی در محل محور خنثی با تنش برشی متوسط مقطع برابر است.