



حل تشریحی کنکور کارشناسی ارشد ۱۴۰۱

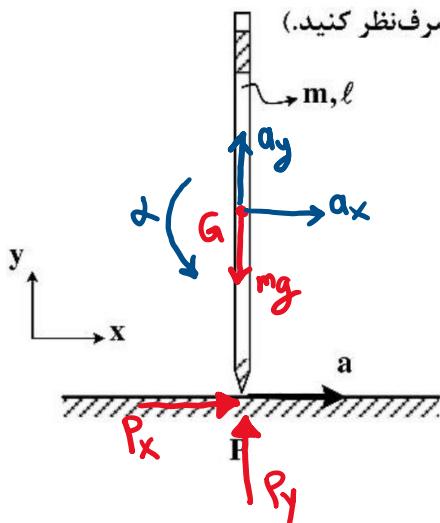
رشته مهندسی مکانیک

باکس دینامیک و ارتعاشات

تنظیم: استاد خالصی

سوالات دینامیک

-۹۱ در یک حرکت ناگهانی و شوخی خط‌رنگ پسرکی قالیچه‌ای را از زیر پای دوستش علی می‌کشد. علی را مشابه یک مداد به جرم m و طول ℓ مدل نمایید. چنانچه نوک مداد مطابق شکل شتاب a را به سمت راست بگیرید، چه نیرویی باید به نوک آن P برای ایجاد چنین شتابی وارد شود؟ (از اصطکاک صرف‌نظر کنید).



برای هم بزنید، دو مرحله برای
زنید P در نظر نهاده کریم

$$\frac{1}{2}ma \hat{i} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}ma \hat{i} + mg \hat{j} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}ma \hat{i} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4}ma \hat{i} + mg \hat{j} \quad (4) \checkmark$$

: $a_i = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + \frac{1}{2} \alpha \hat{i} \rightarrow \begin{cases} a_y = 0 \\ a_x + \frac{1}{2} \alpha = a \end{cases} \quad (1)$

مادلاس نزدیک شدن : $\begin{cases} \sum F_x = ma_x \Rightarrow P_x = ma_x \quad (2) \\ \sum F_y = ma_y \Rightarrow P_y - mg = ma_y = 0 \Rightarrow P_y = mg \quad \text{کرنیده اند} \\ \sum M_G = I_G \alpha \Rightarrow P_x \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12}ml^2 \alpha \quad (3) \quad \text{خرفت شدن} \end{cases}$

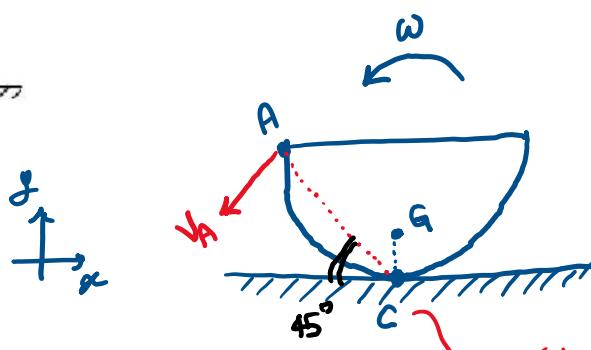
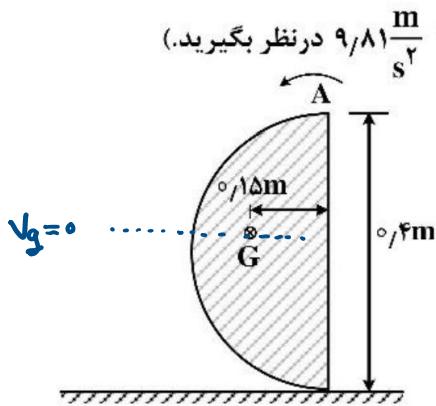
$$(3) \Rightarrow P_x = \frac{1}{6}mld \xrightarrow{(2)} ma_x = \frac{1}{6}mld \Rightarrow a_x = \frac{1}{6}ld \quad \Downarrow (1)$$

$$\alpha = 4a_x \Leftarrow a_x = \frac{1}{3}(a - a_x)$$

$$\Rightarrow P_x = ma_x = \frac{1}{4}ma$$

$$\Rightarrow \vec{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} = \frac{1}{4}mai \hat{i} + mg \hat{j} \quad \checkmark \quad \text{کرنید}$$

- ۹۲ - جسمی به جرم ۱۵ کیلوگرم از حالت سکون مطابق شکل زیر رها می‌شود. سرعت A از جسم هنگامی که 90° درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت چرخیده است چند $\frac{m}{s}$ است؟ (چرخش جسم را غلتش بدون لغزش فرض کنید و ممان اینرسی مرکز جرم جسم را $I_G = 0.25 \text{ kg.m}^2$ درنظر بگیرید).



$$-1.86\hat{i} - 1.86\hat{j} \quad (1)$$

$$-2.5\hat{i} + 2.5\hat{j} \quad (2)$$

$$-2.48\hat{i} - 2.48\hat{j} \quad (3) \checkmark$$

$$-0.62\hat{i} - 0.62\hat{j} \quad (4)$$

ضیافت نهایی مذکور:

شرط عدم ترشی \rightarrow مرز آن در ان

در صورت کوچک، دستگاه مفعون ذکر شده است، ولی بطور معمول ω را بهتر راست ω و رابه سمت بالا درنظر نگیریم. با توجه به زوایه 45° دارای دستگاه ذکر شده در شکل برای نقطه A، این رضی ممکن است سُخنی داشته باشد که با توجه با زاویه 45° ، مولفه‌های زاویه برابر در محدوده باعلامت منفی هستند. بنابراین زوایه 3° حذف خواهد شد.

باتوجه با اینکه فقط ضیافت ابتداء از آنهاست و لست اعیت دارد و نیروی خارجی ناپایداری برخورد سیستم کار انجام نمی‌دهد، می‌توان از اصل بیان ارزی استفاده کرد.

$$\begin{cases} T_1 = 0 \\ V_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = 0$$

$$\begin{cases} V_2 = mg\Delta h = 15g (-0.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2} (0.25 + 15 \times 0.05^2) \omega^2 \end{cases}$$

هران عَدَار ۱۵ را دَمِقْعَنْ عَالِمْ بَرَكَدَرْدَه. دَلَی باَوَمْ بَهَنَدَتَه کَزَنَهِه حَادَه در دَكَهِه سَنَهِه نَبَدَنَه ماَسِنْ حَسَابَه
در جَلَه، مَنَهانَه عَالِمْ بَرَكَدَرْدَه رَأَيَهِه بَيَنَهِه اَجَامَه دَارَه:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(0.25 + \frac{15 \times 0.05^2}{15} \right) \omega^2 = \frac{15 \times 10 \times 0.15}{1.5}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2 \times 1.5}{\frac{0.25}{15} + 0.05^2} = \frac{3}{\frac{25/15}{100} + 0.0025} \approx \frac{\frac{3}{1/4}}{15} = 3 \times 4 \times 15 = 180$$

$$\Rightarrow \omega \approx \sqrt{180} \approx 13.4 \quad \Rightarrow \quad V = -0.2\omega i - 0.2\omega j \\ = -\frac{13.4}{5} i - \frac{13.4}{5} j \approx -2.7i - 2.7j$$

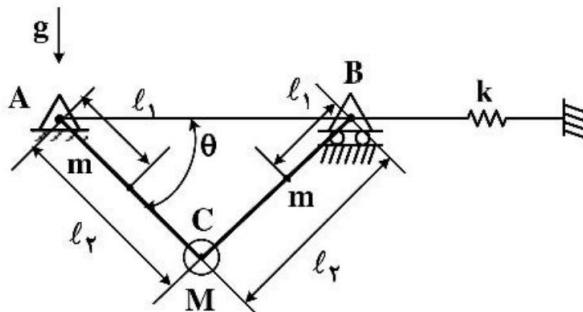
کَه مَنَهانَه نِجَهَه رَفَتَه کَزَنَهِه ۳ مَيَعَه اَسَتَه. بَهَنَه اَسَتَه کَه دَمِقْعَنَه اَسَتَه دَلَی اَسَتَه لَزَعَلَه ۹.۸۱ g و اَنَجَامَه
عَالِمْ بَرَكَدَرْدَه بَهَنَه اَسَتَه، هَنَه سَعَتَه دَادَه شَهه دَرَکَزَنَهِه ۳ بَهَنَه اَسَتَه مَنَهانَه.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = -15 \times 9.81 \times 0.15 = -22.075 \\ T_2 = \frac{1}{2} (0.25 + 15 \times 0.05^2) \omega^2 = 0.14375 \omega^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 153.6 \quad \Rightarrow \quad \omega = 12.39$$

$$\Rightarrow V = -\frac{12.39}{5} i - \frac{12.39}{5} j = -2.48i - 2.48j$$

- ۹۳ در سیستم زیر با صرف نظر از اصطکاک در تمامی مفاصل و با درنظر گرفتن حالت استراحت (شرایط بدون کشیدگی یا فشرده‌گی) فنر در $\theta = 0^\circ$ ، مقادیر θ که به ازای آن‌ها، سیستم در حالت تعادل قرار خواهد گرفت، از حل کدام معادله قابل یافته است؟ m و ℓ_2 جرم و طول میله‌های AC و BC و فاصله مرکز جرم A از AC و B از BC برابر ℓ_1 و I ممان اینرسی میله AC نسبت به A و میله BC نسبت به B است. جرم متتمرکز M در محل لولای مشترک میله‌ها در قرار دارد.



$$\sin \theta (1 - \cos \theta) = \frac{(2m\ell_1^2 + M\ell_2^2 + 2I_0)g}{4k\ell_1\ell_2} \quad (1)$$

$$\tan \theta (1 - \cos \theta) = \frac{(2m\ell_1 + M\ell_2)g}{4k\ell_2} \quad (2) \checkmark$$

$$\tan \theta = \frac{2k\ell_2}{(2m + M)} \quad (3)$$

$$\tan \theta = \frac{2k\ell_2}{m\ell_1 + M\ell_2 + m(2\ell_2 - \ell_1)} \quad (4)$$

برای حل این سؤال می‌توان از دروس استفاده کرد.

دروز نسخه: در حالت حدی، اگر فنر خیلی نسبت باشد و فرض $\infty \rightarrow k$ در نظر گرفته شود، θ تعادل باید بسیار کوچک باشد. بنابراین گزینه حای ۳ و ۴ خذف می‌شوند.

از طرفی به خاطر وجود تعامل دسانکن بودن مجموعه، باید I تأثیری در معdar θ تعادل داشته باشد. بنابراین گزینه ۱ هم خذف نموده گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دروز کاربردی: در اینجا جایه جایی کوچک، با بر تغییرات کار انجام شده بر روی سیستم برای بصر باید.

$$dU' = dT + dV = 0$$

کار نیروی خارجی نایابی کار $\rightarrow 0$
 زیرا جنبش از محیط است $\rightarrow 0$
 کرانه \rightarrow سیستم در حالت سکون است $\rightarrow 0$

$$\left\{ V_e = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k (2l_2(1 - \cos \theta))^2 \Rightarrow dV_e = \frac{1}{2} k \cdot 4l_2^2 \cdot 2(1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta = 4kl_2^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta \right.$$

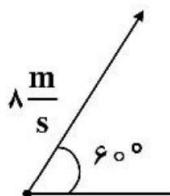
$$\left. V_g = 2mg\ell_1 \sin \theta + Mg\ell_2 \sin \theta \Rightarrow dV_g = 2mg\ell_1 \cos \theta \delta \theta + Mg\ell_2 \cos \theta \delta \theta \right.$$

$$\Rightarrow dV_e = dV_g \Rightarrow (1 - \cos \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{(2ml_1 + Ml_2)g}{4kl_2^2}$$

صفحه: ۵ گزینه ۲

- ۹۴- شخصی در حال سکون توبی را با زاویه 60° درجه نسبت به افق و با سرعت اولیه $\frac{m}{s}$ به جلو پرتاب می‌کند و در همان لحظه شروع به دویدن به دنبال توب می‌کند. اگر شخص با سرعت ثابت $\frac{m}{s}$ بود شعاع انحنای مسیر حرکت توب از دید

شخص در حال دویدن هنگامی که توب به نقطه اوج خود می‌رسد، چند متر است؟ (شدت جاذبه 9.81 m/s^2 فرض شود.)

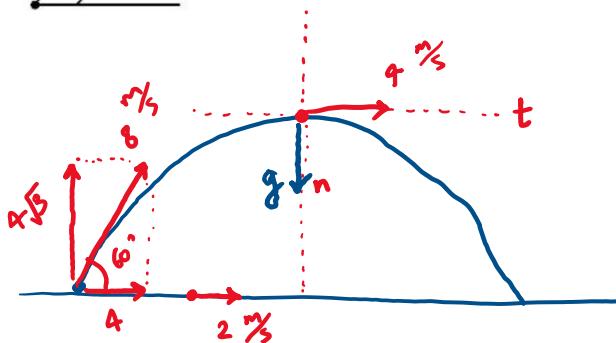


(۱) ۰.۴۰۸ ✓

(۲) ۲.۴۵

(۳) صفر

(۴) ۱.۶۳۱



مولفه‌های سرعت رُستاب در مَرْجِعِ های مُتَقَوِّلِ عَارِضِ داده شده است.

در نظر بررسی در نظر اینجاست که توب سرعت $\frac{m}{s}$ ۴ بوده است این دُستَاب g بصره عکوسی دارد. بازهم به معنی سریوگت توب، داین نظر را اسایی $+ \alpha$ این داشتای α عودی (دبیرت باین) است.

منظمه باید وقت کرد چنان وکت نسبت به مکان (مسکاہ تکر) با سرعت $\frac{m}{s}$ ۲ اینه در نظر گرفته شده، باشه از سرعت نبین استفاده کرد.

بسیاری دستگاه $n=t$ طبق:

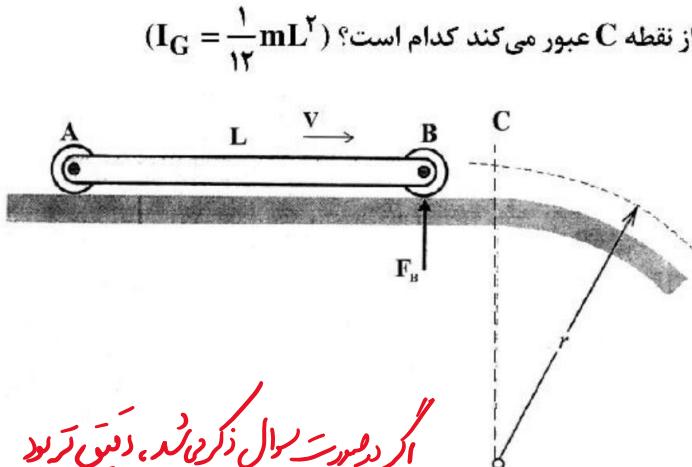
$$\alpha_n = \frac{v^2}{r} \Rightarrow g = \frac{v_{rel}^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v_{rel}^2}{g} = \frac{2^2}{9.81} = 0.408 \quad \checkmark$$

له شعاع انحنای

پس گزینه ۱ صحیح است. لازم بذکر است به دلیل اختلاف گزینه‌ها، رتوان از عاسی به تورین هم اسنده نگویی:

$$r = \frac{v^2}{g} \approx \frac{2^2}{10} = 0.4 \quad \checkmark$$

-۹۵- میله یکنواخت زیر دارای جرم m و طول L است. این میله بر روی غلتک های خود خود با سرعت v در امتداد افقی در حرکت است. نیروی واکنش زیر غلتک B را در لحظه‌ای که از نقطه C عبور می‌کند کدام است؟ ($I_G = \frac{1}{12}mL^2$)



$$\frac{mv^2}{3r} + \frac{mg}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{mv^2}{4r} + \frac{mg}{2} \quad (2)$$

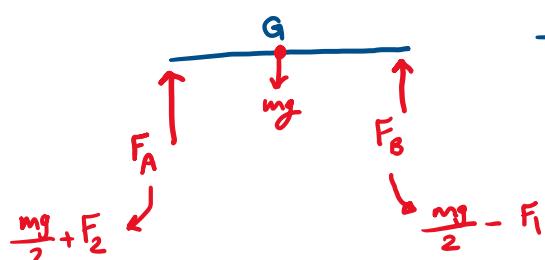
$$-\frac{mv^2}{3r} + \frac{mg}{2} \quad (3) \checkmark$$

$$\frac{mv^2}{4r} + \frac{mg}{2} \quad (4)$$

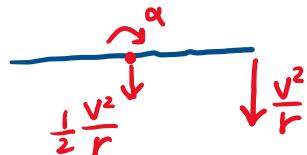
اگر درست سوال ذکر نبود، دویں تردید

قبل از رسیدن غلتک B به نقطه C ، به خاطر وست افعی (بدل ستاب) نیروی غلتک A و B باهم برابر می‌شوند
سدار حریک $\frac{mg}{2}$ است. بعده رسیدن به نقطه C ، ستاب نقطه B مولفه جانب مرکز $\frac{v^2}{r}$ درآهد است.

F.B.D.



Kinetic Diagram



با وجود $\frac{mg}{2}$ در رام گزینه‌ها، نیروهای F_A و F_B را بحسب افتلاف با $\frac{mg}{2}$ می‌رسم نامرا حل ساده تر شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_G = I_G \alpha \Rightarrow \left(\frac{mg}{2} + F_2\right)\frac{l}{2} - \left(\frac{mg}{2} - F_1\right)\frac{l}{2} = \frac{1}{12}mL^2\alpha \\ \Rightarrow (F_2 + F_1)\frac{l}{2} = \frac{1}{12}mL^2\alpha \Rightarrow F_1 + F_2 = \frac{1}{6}mL\alpha \\ \sum F_y = ma_y \Rightarrow -\left(\frac{mg}{2} + F_2\right) - \left(\frac{mg}{2} - F_1\right) + mg = m\frac{1}{2}\frac{V^2}{r} \Rightarrow F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\frac{mV^2}{r} \end{array} \right.$$

از طرفه با توجه به رابطه سینماگیر نسبت بخط ذرا ویا ای داریم:

$$l\alpha = \frac{v^2}{r}$$

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = \frac{1}{6} m l \alpha = \frac{1}{6} \frac{m v^2}{r} \\ F_1 - F_2 = \frac{1}{2} \frac{m v^2}{r} \end{cases} \Rightarrow 2F_1 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \frac{m v^2}{r} = \frac{2}{3} \frac{m v^2}{r} \Rightarrow F_1 = \frac{1}{3} \frac{m v^2}{r}$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{mg}{2} - F_1 = \frac{mg}{2} - \frac{1}{3} \frac{m v^2}{r} \quad \checkmark$$

در نتیجه گزینه ۳ صحیح است.

سوالات ارتعاشات

۹۶- ماتریس‌های جرم و سفتی یک سیستم ارتعاشی دو درجه آزادی به ترتیب برحسب $\frac{N}{m}$ و kg به صورت زیر هستند:

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

فرکانس‌های طبیعی این سیستم برحسب رادیان بر ثانیه کدامند؟

$\omega_1 = 2, \omega_2 = 3$ (۲)

$\omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{3}$ (۱) ✓

$\omega_1 = \sqrt{2}, \omega_2 = \sqrt{3}$ (۴)

$\omega_1 = 1, \omega_2 = 3$ (۳)

برای یافتن فرکانس حای طبعی، باز $|K - M\omega^2| = 0$ را برسی کنیم.

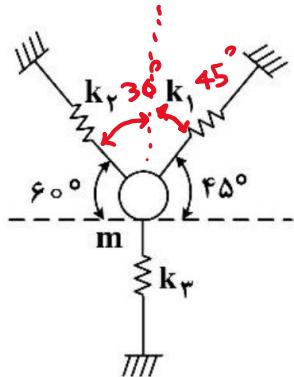
$$|K - M\omega^2| = \begin{vmatrix} 2-\omega^2 & -1 \\ -1 & 2-\omega^2 \end{vmatrix} = (2-\omega^2)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2-\omega^2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 = 1 \Rightarrow \omega_1 = 1 \\ \omega^2 = 3 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \checkmark$$

بنابراین $\omega_1 = 1$ صحیح است.

راجه به دست آمده باری ω ساده بود و پاسخ‌ها برتر یافته شد. در صورت سیده بودن راجه، می‌توان ω حای را در شرط دگرگزینه‌های مختلف را برابر چندرسانی حاصل کرد.

- ۹۷ جرم m بین سه فنر در حالت تعادل استاتیکی مطابق شکل قرار گرفته است. (سیستم در صفحه افقی واقع شده است). فرکانس‌های طبیعی این سیستم بر حسب رادیان بر ثانیه کدامند؟



$$k_1 = 350 \frac{N}{m}$$

$$k_2 = 875 \frac{N}{m}$$

$$k_3 = 1225 \frac{N}{m}$$

$$m = 1.3 \text{ kg}$$

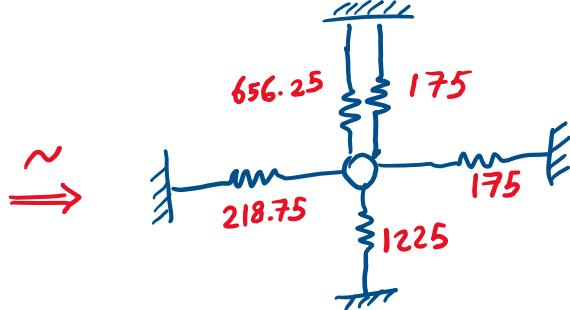
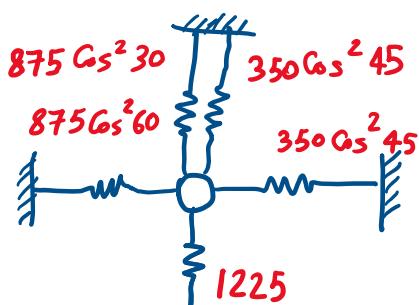
$$\omega_1 = 27.2, \omega_2 = 36.28 \quad (1)$$

$$\omega_1 = 16.85, \omega_2 = 40 \quad (2) \checkmark$$

$$\omega_1 = 19.58, \omega_2 = 28.25 \quad (3)$$

$$\omega_1 = 35, \omega_2 = 43.21 \quad (4)$$

باوجه به زایده‌های داره شده، می‌توان مزای مایل را با در نظر گیری دعوی جایزین رود.



باوجه به ناصله گزینه‌ها، می‌توان از مدار تغیری بلای محاسبه سریع بر درجه استفاده کرد.
مزای این دعوی با هم موارد حسن و نابالین سخن آن ها با هم جمع می‌شوند.

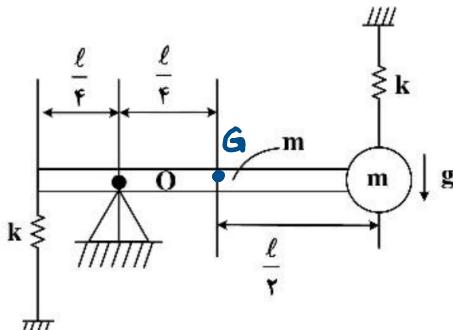
$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} 1.3 \\ 2056.25 \end{matrix} + \begin{matrix} 393.75 \\ 1.3 \end{matrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2056.25}{1.3}} = 39.8$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{393.75}{1.3}} = 17.4$$

نابالین گزینه ۲ صحیح است.

- ۹۸ در شکل زیر جرم m به انتهای یک میله همگن و باریک با طول ℓ و جرم m متصل است. اگر این میله حول پایه اهرم O با دامنه کوچک نوسان کند، فرکانس طبیعی سیستم کدام است؟



$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{30k}{19m}} \quad (1) \\ & \sqrt{\frac{30kl + 48mg}{19ml}} \quad (2) \\ & \sqrt{\frac{15k}{17m}} \quad (3) \checkmark \\ & \sqrt{\frac{2kl + mg}{ml}} \quad (4) \end{aligned}$$

با اوصیه به مجتمعه داره شده، با نوشت لشّ در حل نظره ۰ می‌تران معادله سیستم را به دست آورد.

$$\begin{aligned} & K \frac{3l}{4} \theta \quad \sum M_O = I_0 \ddot{\theta} \\ & K \frac{l}{4} \theta \quad \rightarrow -K \frac{l}{4} \theta \cdot \frac{l}{4} - K \frac{3l}{4} \theta \cdot \frac{3l}{4} = I_0 \ddot{\theta} \\ & \Rightarrow I_0 \ddot{\theta} + \left(\frac{1}{16} + \frac{9}{16} \right) Kl^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

$$I_0 = I_G + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 + m \left(\frac{3l}{4} \right)^2$$

$$= \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{16} ml^2 + \frac{9}{16} ml^2$$

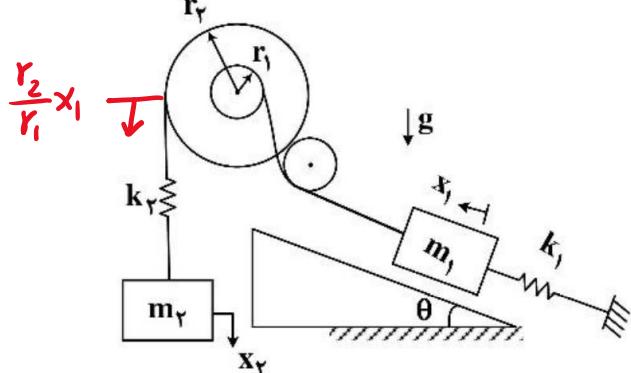
$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{10}{16} \right) ml^2$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{Kq}{m_q}} = \sqrt{\frac{\frac{10}{16} Kl^2}{\left(\frac{2}{24} + \frac{15}{24} \right) ml^2}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{8}}{\frac{17}{24}}} \frac{k}{m} = \sqrt{\frac{15}{17}} \frac{k}{m} \quad \checkmark$$

نابالین گزینه ۳ صحیح است.

- ۹۹ معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی زیر با فرض اینکه غلتک‌ها بدون وزن و با لولاهای ثابت و سطوح تماسی بدون اصطکاک هستند، کدام است؟ ($x_1 = 0$ و $x_2 = 0$) وضعیت تعادل را نشان می‌دهند.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_r (x_1 - x_2) + m_1 g \sin \theta = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - \frac{r_2}{r_1} x_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_r \frac{r_1}{r_2} (r_1 x_1 - r_2 x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (r_2 x_2 - r_1 x_1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_r \frac{r_1}{r_2} (r_1 x_1 - r_2 x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - \frac{r_2}{r_1} x_1) = 0 \end{cases} \quad (3) \checkmark$$

$$\begin{array}{l} k_2(x_2 - \frac{r_2}{r_1} x_1) \\ \uparrow \\ m_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{r_2}{r_1} k_2 (\frac{r_2}{r_1} x_1 - x_2) \\ \searrow \\ x_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_r \frac{r_1}{r_2} (r_1 x_1 - r_2 x_2) + m_1 g \sin \theta = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - \frac{r_2}{r_1} x_1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

نیزی در m_1 و m_2 با کنسرس اولیه نظرها خشی نمود. پس نباید در معادله حرکت ظاهر شوند.
پس گزینه‌های اول و دوم می‌شوند. منقی بودن ضریب $k_2 x_1$ در معادله اول گزینه ۲ نیز مسخه است. پس گزینه ۳ صحیح است.

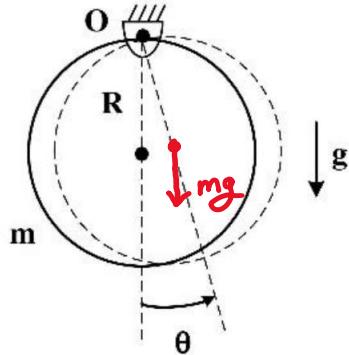
با این حال باز نوشتن معادلات هم منellan به باقی مرسید:

$$\begin{cases} m_1: \quad m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 \frac{r_2}{r_1^2} (r_2 x_1 - r_1 x_2) = 0 \\ m_2: \quad m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - \frac{r_2}{r_1} x_1) = 0 \end{cases}$$



که همان روابط گزینه ۳ هستند.

- ۱۰۰- مطابق شکل، دیسک نازک و یکنواختی به جرم m در نقطه R در شعاع m لولا شده است. فرکанс طبیعی نوسانات زاویه‌ای کم دامنه چقدر است؟



$$\sqrt{\frac{3g}{2R}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{g}{2R}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{2g}{R}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{2g}{3R}} \quad (4) \quad \checkmark$$

این سؤال نزیر را ص بازشن معالجه کشیده و حل نمایه ۰ حل می‌شود.

$$\sum M_O = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mgR \sin \theta = I_0 \ddot{\theta} = (I_c + mR^2) \ddot{\theta} = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right) \ddot{\theta}$$

$$= \frac{3}{2}mR^2 \ddot{\theta}$$

$$\text{MD} \quad \frac{3}{2}mR^2 \ddot{\theta} + mgR\dot{\theta} = 0$$

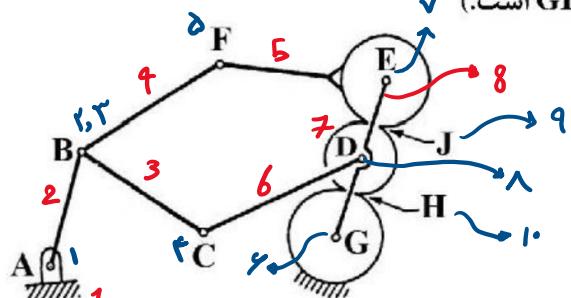
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{mgR}{\frac{3}{2}mR^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}} \quad \checkmark$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

سوالات دینامیک ماشین

- ۱۰۱ درجه آزادی برای اهرم‌بندی چرخ‌دنده‌ای سیاره‌ای کدام است؟

(مجموعه سیاره‌ای شامل چرخ‌دنده‌های D, E, G و بازوی GE است).



$$\left\{ \begin{array}{l} 1-8: n \\ 1-10: \bar{J}_1 \end{array} \right.$$

1 (۱)

۳ (۲)

(۳) صفر

۲ (۴)

ردیش شهودی: مکانیزم چرخ‌دنده سیاره‌ای که درجه آزادی دارد. باستخراج سُنْتِن رُبُعیت چرخ‌دنده‌ها، برآوردهٔ لینک حامل فیلس نهاد. سیستم ۱ درجه آزادی دارد.

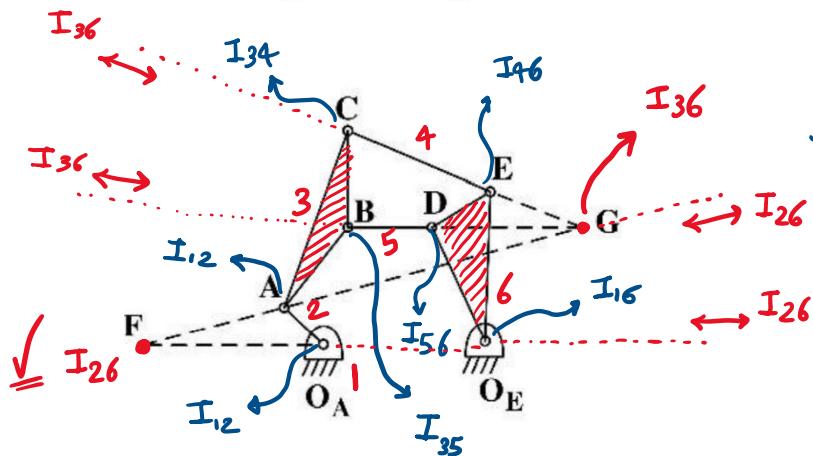
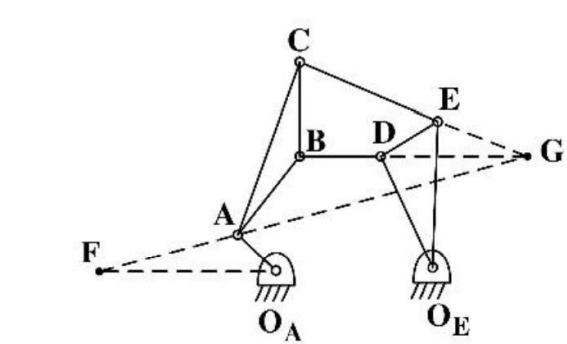
ردیش فیلس نهاد: با نیکس کردن لینک EG، نتایج ممکن نهاد. درین حالت همهٔ لینک‌ها مابت هستند و درجه آزادی سیستم مفتوح نهاد. بنابراین سیستم ۱ درجه آزادی بود.

رابطهٔ توزیعی:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 8 \\ \bar{J}_1 = \\ \bar{J}_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow F = 3(n-1) - 2\bar{J}_1 - \bar{J}_2 = 3(8-1) - 2 \times 10 - 0 = 21 - 20 = 1$$

بنابراین سیستم ۱ درجه آزادی است.

- ۱۰۲ - در مکانیزم ۶ میله‌ای شکل زیر، اگر سرعت V_A معلوم باشد، سرعت V_E کدام گزینه است؟



$$\frac{O_A E}{O_A F} \cdot \frac{O_E F}{O_E E} \cdot V_A \quad (1)$$

$$\frac{O_E E}{O_A E} \cdot \frac{O_E F}{O_A F} \cdot V_A \quad (2)$$

$$\frac{O_A F}{O_A E} \cdot \frac{O_E E}{O_E F} \cdot V_A \quad (3)$$

$$\frac{O_A F}{O_A A} \cdot \frac{O_E E}{O_E F} \cdot V_A \quad (4) \checkmark$$

باتوجه گزینه‌ها، همان‌طور که مذکور شد می‌توانیم با این روش مکرار آن در ران به دست بی آید.

$$I_{26} = F \Rightarrow \text{نکل تقابل، طبق:}$$

نتهی I_{26} ، رُزَّانه در ران نکنک ۲ نیست پر نکنک ۶ است.

بنابراین می‌توان نظر کرد I_{26} هم روى نکنک ۲ در نکنک ۶ مکاردارد و سرعت آن برابری خود نکنک، برابر است.

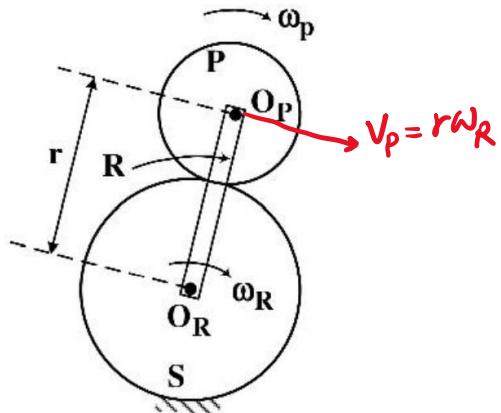
بنابراین ابتدا باتوجه به سرعت A ، سرعت F را تعیین کرد و سپس سرعت E را بحسب فرمول آوریم.

$$V_F = \frac{O_A F}{O_A A} V_A$$

$$\Rightarrow V_E = \frac{O_E E}{O_E F} V_F = \frac{O_E E}{O_E F} \cdot \frac{O_A F}{O_A A} V_A \quad \checkmark$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۱۰۳ - ممان اینرسی معادل چرخ دنده خورشیدی زیر برابر است با:



$$I_{Eq} = I_R + I_R \left(\frac{\omega_P}{\omega_R} \right)^2 + m_P r^2 \quad (1)$$

$$I_{Eq} = I_R + I_P \left(\frac{\omega_P}{\omega_R} \right)^2 + m_R r^2 \quad (2)$$

$$I_{Eq} = I_P + I_R \left(\frac{\omega_P}{\omega_R} \right)^2 + m_P r^2 \quad (3)$$

$$I_{Eq} = I_R + I_P \left(\frac{\omega_P}{\omega_R} \right)^2 + m_P r^2 \quad (4) \checkmark$$

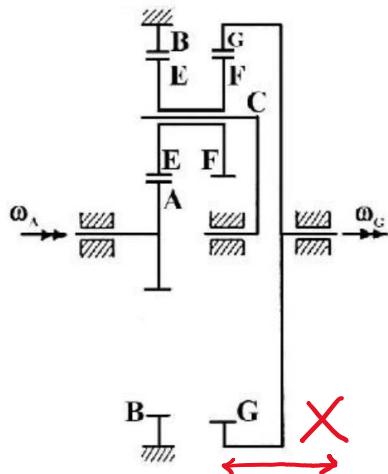
دقیق شود اگر دو مرتب سوال، ذکر نشده که ممان معادل نسبت به کدام حرکت مبنظر است.
با این حال با توجه به وجود ترم $m_P r^2$ در عالم گزینه ها، ممان معادل حول نقطه O_R (سرعت زیرا ω_R^2) مبنظر است.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_R \omega_R^2 + \frac{1}{2} I_P \omega_P^2 + \frac{1}{2} m_P (r \omega_R)^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(I_R + I_P \left(\frac{\omega_P}{\omega_R} \right)^2 + m_P r^2 \right)}_{I_{Eq}} \omega_R^2 \end{aligned}$$



بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

- ۱۰۴ - ورودی ω_A به مجموعه سیارهای (A, E, B, C) موجب حرکت مجموعه سیارهای (F, G, C) از طریق بازوی مشترک در سیاره دوبل (E, F) می‌شود. کدام عبارت برای ω_C سرعت زاویه‌ای بازو درست است؟



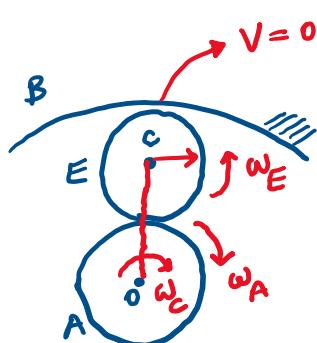
$$\omega_C = [\omega_E]^{-1} \omega_A \quad (1)$$

$$\omega_C = \left[1 + \left(\frac{N_B}{N_A} \right) \right]^{-1} \omega_A \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\omega_C = [\omega_A]^{-1} \omega_E \quad (3)$$

$$\omega_C = \left[1 + \left(\frac{N_B}{N_E} \right) \right]^{-1} \omega_E \quad (4)$$

باوجه به این رابطه ω_C بحسب ω_A منظر سوال است هسته ای است که بجز سمت راست مجموعه در این روت تا سری ندارد. گزینه‌های داده شده هم نشان می‌دهند N_E, N_B, N_A و $N_E < N_B < N_A$ مقدارانه در جواب باشد. به مجموعه نهاده ننمی‌شوند.



$$N_B = N_A + 2N_E \Rightarrow N_E = \frac{N_B - N_A}{2}$$

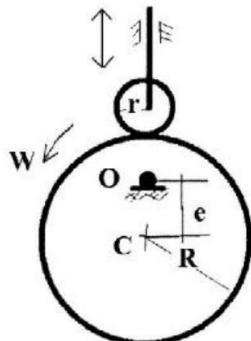
$$N_A \omega_A = 2N_E \omega_E = (N_B - N_A) \omega_E = 2N_E \omega_E$$

$$C) \text{ مرتبت نظر: } \omega_C (N_A + N_E) = \omega_E N_E = \frac{1}{2} N_A \omega_A$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_C &= \frac{N_A}{2(N_A + N_E)} \omega_A = \frac{N_A}{2N_A + 2N_E} \omega_A = \frac{\frac{N_A}{N_A}}{2\frac{N_A}{N_A} + \frac{N_B - N_A}{N_A}} \omega_A \\ &= \frac{\frac{N_A}{N_A}}{\frac{N_A + N_B}{N_A}} \omega_A = \frac{1}{1 + \frac{N_B}{N_A}} \omega_A = \left(1 + \frac{N_B}{N_A}\right)^{-1} \omega_A \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۰۵- بادامک نشان داده شده حول نقطه O در حال دوران است. کدام گزینه در مورد زاویه فشار در یک زاویه دوران



معین بادامک درست است؟

۱) با کاهش r کمتر می‌شود.

۲) ثابت است.

۳) با کاهش R کمتر می‌شود.

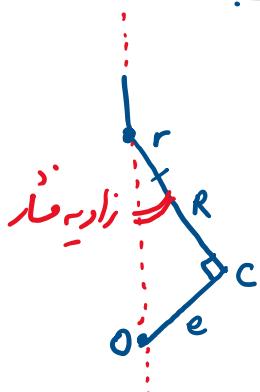
۴) با کاهش e کمتر می‌شود.



عامل اصلی ایجاد زاویه فشار، غریب از هرگز بادامک (۴) است.

بنابراین با کاهش e ، زاویه فشار ممکن شود گزینه ۴ صحیح است.

پس مسئله حداقل زاویه فشار دائم:



محض است که با کاهش e ، زاویه فشار کاهش و با کاهش ۲ یا R ، زاویه فشار افزایش می‌یابد.

(البته با ازایش ۲ یا R ، زاویه فشار کاهش می‌یابد)

سوالات کنترل

۱۰۶ - حد بهره Gain Margin یک سیستم مدار بسته با تابع تبدیل حلقه باز زیر چقدر است؟

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 9)}$$

- ۱ (۱)
 ۹ (۲) ✓
 ۲۷ (۳)
 ۹ (۴)

برای محاسبه حد بهره، باید لنزه تابع تبدیل را بر ازای زاویه ناز ۱۸۰° محاسبه کرد و مکلوس کنیم.

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega(-\omega^2 + 3j\omega + 9)} = 0 - 45^\circ - \angle(9 - \omega^2 + 3j\omega)$$

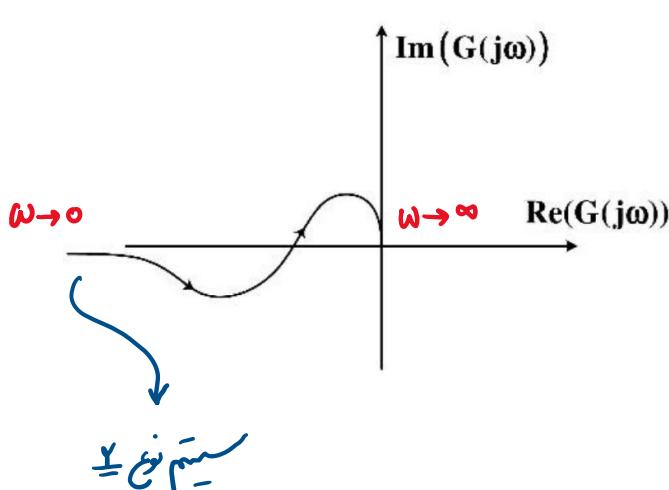
$$\begin{aligned} & \Rightarrow -180 = 0 - 90 - \angle(9 - \omega^2 + 3j\omega) \\ & \Rightarrow \angle(9 - \omega^2 + 3j\omega) = 90^\circ \quad \Rightarrow \downarrow \\ & \qquad \qquad \qquad \omega = 3 \quad \leftarrow 9 - \omega^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |G(j3)| = \left| \frac{1}{3j(9 - 9 + 9j)} \right| = \frac{1}{27}$$

$$\text{茗} \quad GM = \frac{1}{|G(j\omega_{180})|} = \frac{1}{1/27} = 27 \quad \checkmark$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۰۷ - دیاگرام نایکوئیست شکل زیر مربوط به کدام تابع تبدیل است؟



$$\frac{(s+1)}{s(s^2 + 10s + 100)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{s(s^2 + s + 1)} \quad (2)$$

$$\frac{(s+10)}{s^2(s^2 + s + 1)} \quad (3)$$

$$\frac{(s+1)}{s^2(s^2 + 10s + 100)} \quad (4) \checkmark$$

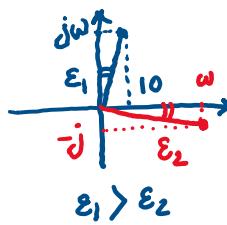
با توجه به لینک اطلاعات کامن روی دیاگرام را دارد از $\omega = 0$ ، من توان تابع تبدیل دستی را مستقیماً برسید کرد.

با توجه به موقعیت دیاگرام نایکوئیست در $\omega = 0$ ، من توان تابع تبدیل نوع ۲ (دُرجه) را مستقیماً برسید که حذف اندیزه اد ۲ را در مجموعه دارد.

برای اثبات بین گزینه های ۳ و ۴ می توان از ۲ مسنجه استفاده کرد. یا اسکان موقع فاز 180° را برپا کرد و یا زاویه فاز در $\omega = 0$ را بدستور مطالعه داشته باشد.

گزینه ۳:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{\omega^2(\omega^2 - 1 - j\omega)}$$

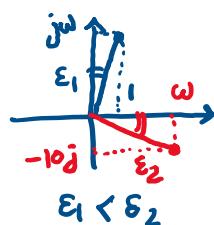


$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{90 - \epsilon_1}{-\epsilon_2} \\ &= 90 - \epsilon_1 + \epsilon_2 < 90 \end{aligned}$$

X

گزینه ۴:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{\omega^2(\omega^2 - 100 - 10j\omega)}$$



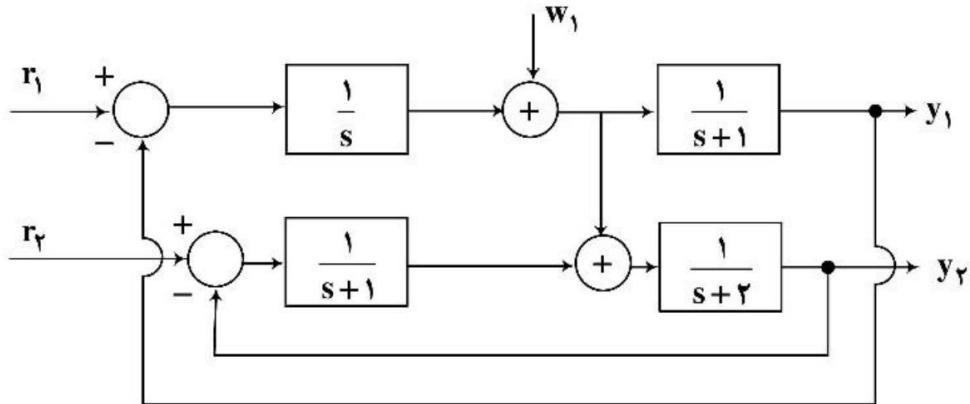
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{90 - \epsilon_1}{-\epsilon_2} \\ &= 90 - \epsilon_1 + \epsilon_2 > 90 \end{aligned}$$

✓

نمایرین گزینه ۴ صحیح است.

۱۰۸ - در سیستم کنترلی زیر تابع تبدیل میان ورودی r_1 تا خروجی y_2 کدام است؟

$$\frac{Y_2(s)}{R_1(s)} = ?$$



روش میسلن

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{1}{s(s+2)} \\ L_1 = \frac{-1}{s(s+1)} \\ L_2 = \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \end{array} \right.$$

$$\frac{Y_2(s)}{R_1(s)} = \frac{(s+1)^2}{s(s+1)^2(s+2) + s(s+1) + (s+1)(s+2) + 1} \quad (1)$$

$$\frac{Y_2(s)}{R_1(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2) + 1} \quad (2)$$

$$\frac{Y_2(s)}{R_1(s)} = \frac{(s+1)}{s(s+1)(s+2) + s + (s+2)} \quad (3)$$

$$\frac{Y_2(s)}{R_1(s)} = \frac{1}{s(s+1) + 1} \quad (4)$$

$$G = \frac{P}{1 - L_1 - L_2 + L_1 L_2}$$

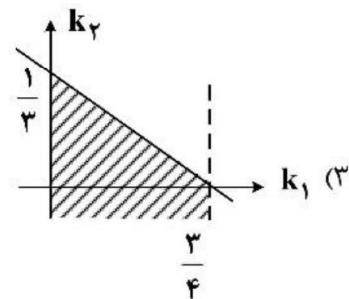
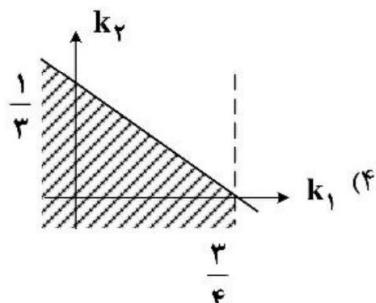
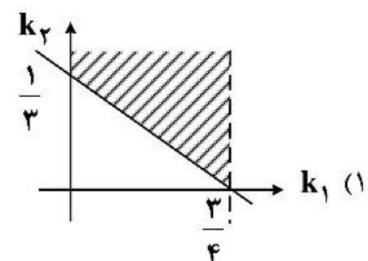
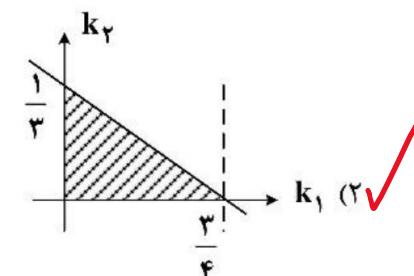
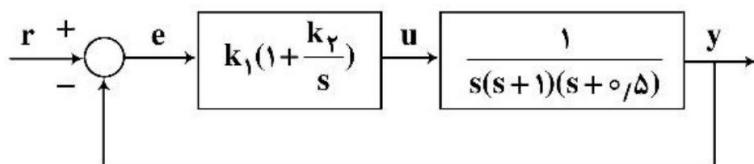
$$= \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)}} = \frac{(s+1)^2}{s(s+1)^2(s+2) + (s+1)(s+2) + s(s+1) + 1}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

(البته اگر رسم ۲۱۱۱ در محیط در نظر گرفته شود، گزینه ۳ بدست می‌آید که اشتباه است)

چون نامه ۲۱۱۱ کاملاً مستقل هستند، با این ۲۱۱۱ در محیط در نظر گرفته شود.

- ۱۰۹ - براساس معیار پایداری راوث (Routh) ناحیه هاشورخورده در صفحه $k_1 - k_2$ در کدام گزینه برای سیستم حلقه بسته شکل زیر پایداری ایجاد می‌کند؟



$$G(s) = k_1 \left(1 + \frac{k_2}{s}\right) \frac{1}{s(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{k_1 s + k_1 k_2}{s^2(s+1)(s+\frac{1}{2})}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k_1 s + k_1 k_2}{s^2(s+1)(s+\frac{1}{2}) + k_1 s + k_1 k_2}$$

$$\text{ذنوب ملایم شفته} : s^2(s+1)(s+\frac{1}{2}) + k_1 s + k_1 k_2 = 0$$

$$\Rightarrow s^4 + \frac{3}{2}s^3 + \frac{1}{2}s^2 + k_1 s + k_1 k_2 = 0$$

جهل مارٹ	s^4	1	$\frac{1}{2}$	$k_1 k_2$
s^3	$\frac{3}{2}$	k_1	0	
s^2	$\frac{3}{4} - k_1$ (1)	$k_1 k_2$	0	
s^1	$\frac{(3-4k_1)k_1 - 6k_1 k_2}{3-4k_1}$ (2)			
s^0	$k_1 k_2$ (3)			

$$(3) \rightarrow k_1 k_2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{k}} \rightarrow \text{در ربع اول رسم} \quad \text{گزینه ۳ و ۴ حذف نموده}$$

$$(1) \rightarrow \frac{3}{4} - k_1 > 0 \Rightarrow k_1 < \frac{3}{4} \quad \underline{\underline{k}}$$

$$(2) \rightarrow k_1 (3 - 4k_1 - 6k_2) > 0$$

$$k_1 > 0 \text{ و } \underline{\underline{k}} \Rightarrow 3 - 4k_1 - 6k_2 > 0 \Rightarrow 4k_1 + 6k_2 < 3$$

پس محدوده مجاز، نزیر خط $4k_1 + 6k_2 = 3$ می باشد.

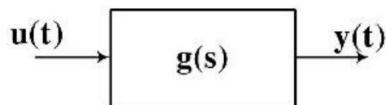
با درج گزینه ها، مرتبط ترین یانع گزینه ۲ است. ابته این خط باید از $(0, \frac{3}{4})$ (محیط) $(k_1, k_2) = (\frac{3}{4}, 0)$ عبور کند.

در حالیکه در غیر گزینه ۲ با استفاده نظره $(\frac{1}{2}, 0)$ $(k_1, k_2) = (0, \frac{1}{2})$ مخفی شده است.

$$u(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(4t) \quad g(s) = \frac{s + 4\sqrt{3}}{2s^2 + s + 30} \quad 110$$

سیستم زیر با تابع تبدیل $g(s)$ را در نظر بگیرید. در صورتی که ورودی سیستم

باشد، خروجی سیستم در حالت پایا کدامیک از گزینه‌های زیر است؟



$$y(t) = \sqrt{2} \sin(4t - 105^\circ) \quad (1)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \sin(4t + 75^\circ) \quad (2)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \sin(4t + 75^\circ) \quad (3)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \sin(4t - 105^\circ) \quad (4)$$

برای حلیل پاسخ پایا، باید حلیل فرکانس را در رکانت رکورد ($\omega = 4$) انجام دارد.

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 4\sqrt{3}}{2(j\omega)^2 + j\omega + 30} \xrightarrow{\omega=4} G = \frac{4\sqrt{3} + 4j}{30 - 32 + 2j} = \frac{4\sqrt{3} + 4j}{-2 + 2j}$$

$$\begin{aligned} 4G &= 4 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) - 4 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right) = 4 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 4 \operatorname{tg}^{-1}(-1) \\ &= 30^\circ - 135^\circ = -105^\circ \\ |G| &= \frac{4\sqrt{3+1}}{\sqrt{4+4}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(4t - 105^\circ) = 2 \sin(4t - 105^\circ) \quad \checkmark$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

(البته اگر $-45^\circ = -(-45^\circ)$ در نظر گرفته شود، $30^\circ - (-45^\circ) = 75^\circ$ بحسب آیدرو گزینه ۳ پاسخ خواهد بود)