۱- فرض کنید (σ_1, y_1) و (σ_2, y_2) دو جواب غیربدیهی (غیرصفر) از مسئلهٔ مقدار مرزی $\begin{cases} y'' - 2xy' + \sigma y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

با شرط $\sigma_1 \neq \sigma_2$ باشند. کدام مورد درست است؟

۱) $\int_0^1 e^{-x^2} y_1(x) y_2(x) dx = 0$

۲) $\int_0^1 e^{2x} y_1(x) y_2(x) dx = 0$

۳) $\int_0^1 y_1^2(x) dx = \int_0^1 y_2^2(x) dx = \frac{1}{2}$

۴) $\int_0^1 y_1(x) y_2(x) dx = 0$

سوال ۱

معادله عادی اشتروم لیوویل

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \sigma h(x))y = 0$$

اگر y_1 و y_2 دو جواب غیربدیهی باشند ⟵ $\int_a^b h(x) y_1 y_2 dx = 0$

معادله: $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

با ضرب در $\frac{1}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$ ⟵ فرم اشتروم لیوویل

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + \sigma y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(x) = 1,\ b(x) = -2x \longrightarrow \frac{1}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} = \frac{1}{1} e^{\int -\frac{2x}{1} dx} = e^{-x^2}$$

$$\longrightarrow (y'' - 2xy' + \sigma y) e^{-x^2} = e^{-x^2} y'' - 2x e^{-x^2} y' + \sigma e^{-x^2} y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2} y') + \sigma e^{-x^2} y = 0 \longrightarrow h(x) = e^{-x^2},\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{\int_0^1 e^{-x^2} y_1 y_2 dx = 0} \longrightarrow \text{گزینه ۱}$$

پیشنهاد به متوسط دانشجویان ⟵ از این سوال بگذرید

۲- فرض کنید $u=u(x,t)$ جواب مسئلهٔ مقدار مرزی زیر باشد:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}, x>0, t>0 \\ u(x,0)=\cos x, x\geq 0 \\ u_t(x,0)=1 \quad , x\geq 0 \\ u(0,t)=0, t\geq 0 \end{cases}$$

در این‌صورت، مقدار $u(2,1)$، کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{2}\cos 4$

۲) $1+\frac{1}{2}\cos 4$

۳) $1+\cos^2 2$

۴) $1-\cos^2 2$

سؤال ۲

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx} : x>0, t>0 \quad c=2 \\ u(x,0)=\cos x : x\geqslant 0 \\ u_t(x,0)=1 \\ u(0,t)=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)=\cos x, \quad g(x)=1$$

* چون خود تابع u (و نه مشتق آن) بر روی مبدأ داده شده است: f و g باید نسبت به x=0، گسترش فرد داده شوند.

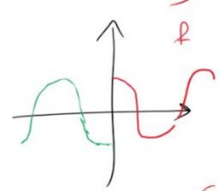
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\left[G(x+ct)-G(x-ct)\right]$$

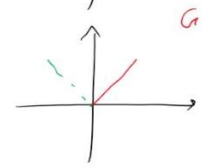
$$G(x)=\int_0^x g(\tau)\,d\tau$$

اگر g گسترش فرد داشته باشد G گسترش زوج دارد.

$$u(\overset{x}{2},\overset{t}{1})=\frac{1}{2}\left[f(2-2(1))+f(2+2(1))\right]+\frac{1}{2\times 2}\left[G(2+2(1))-G(2-2(1))\right]$$

$$f(x)=\cos x, \quad G(x)=\int_0^x g(\tau)\,d\tau=x$$





$$\rightarrow u(2,1)=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(4)\right]+\frac{1}{4}\left[G(4)-G(0)\right]$$

$$\begin{cases} f(0)=\frac{1}{2}\left[f(0^+)+f(0^-)\right]=\frac{1}{2}\left[1+(-1)\right]=0 \\ f(4)=\cos 4 \\ G(0)=0 \\ G(4)=4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow u(2,1)=\frac{1}{2}\left[0+\cos 4\right]+\frac{1}{4}\left[4-0\right]=1+\frac{\cos 4}{2} \longrightarrow$$ گزینه ۲

۳- مسئلهٔ ارتعاش موج داده شدهٔ زیر را در نظر بگیرید. شتاب ارتعاش در $x=\frac{3}{4}$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}+6=u_{xx}\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=u_t(x,0)=0 \\ u(x,0)=3x(x+1)\ ,\ u(1,t)=6 \end{cases}$$

۱) 0

۲) -6

۳) 6

۴) $\frac{63}{16}$

$$\begin{cases} u_{tt}+6=u_{xx}\ ,\ 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=u_t(x,0)=0 \\ u(x,0)=3x(x+1)\ ,\ u(1,t)=6 \end{cases} \longrightarrow$$ همگن سازی $u(x,t)=\omega(x,t)+M(x)$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_{tt}+6=\omega_{xx}+M'' \\ \omega(0,t)+M(0)=\omega_t(x,0)=0 \\ \omega(x,0)+M(x)=3x(x+1) \\ \omega(1,t)+M(1)=6 \end{cases}$$

$c=1$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_{tt}=\omega_{xx} \\ \omega(0,t)=0=\omega_t(x,0) \\ \omega(x,0)=0 \\ \omega(1,t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} M(0)=0 \\ M(x)=3x^2+3x \\ M(1)=6 \end{cases}$$

$g(x)=0$

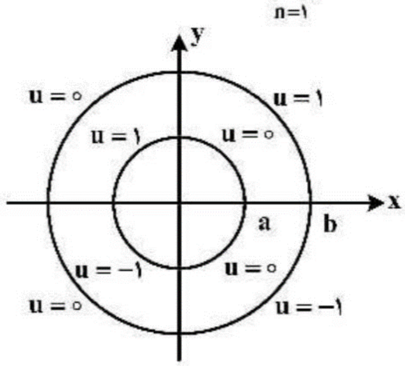
$$\omega(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)+0$$

$$\rightarrow u=\omega(x,t)+M(x)=0+3x^2+3x$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \longrightarrow$$ گزینه ۱

۴- مقدار پتانسیل u در ربع دایره‌های مرزی مطابق شکل زیر داده شده است. اگر تابع پتانسیل u به‌صورت زیر باشد، آنگاه کدام مقدار $|A|$، $|B|$، $|C_۴|$ یا $|E_۳|$، بزرگتر است؟

$$u(\rho,\varphi) = A\ln\rho + B + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)\cos(n\varphi) + \left(E_n\rho^n + F_n\rho^{-n}\right)\sin(n\varphi)$$



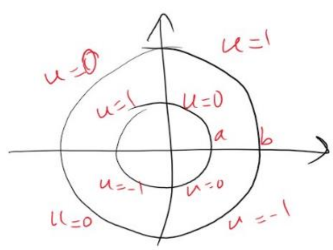
۱) $|A|$

۲) $|B|$

۳) $|C_۴|$

۴) $|E_۳|$

۴-



$$u(\rho,\varphi) = A\ln\rho + B + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\rho^n + F_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi$$

جواب نسبت به φ فرد است ← نسبت به φ فرد است.

$C_n = D_n = 0$ ← فقط سینوسی

در $\varphi = 0, \pi$ ← $\sin n\varphi = 0$

$u(a,0) = 0 \rightarrow A\ln a + B + 0 = 0$

$u(b,\pi) = 0 \rightarrow A\ln b + B + 0 = 0$

$\rightarrow A = B = 0$

← گزینه ۴ صحیح است.

۵- فرض کنید در معادلهٔ انتگرالی $h(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty g(t)\sin(wx)\sin(wt)dwdt$ ، $g(t)=\begin{cases}\cos t & -\pi<t<0\\ \sin t & 0<t<\pi\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$

باشد. مقدار $h\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ کدام است؟

۱) 0

۲) $-\frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{\pi}{4}$

$$h(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty g(t)(\sin\omega x)(\sin\omega t)\,d\omega\, dt$$

$$\rightarrow\ G(\omega)=\int_0^\infty g(t)\sin\omega t\, d\omega \longrightarrow h(x)=\int_0^\infty G(\omega)\sin\omega x\, dx$$

از طرفی تبدیل فوریه :

$$g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(\omega)\sin\omega x\, dx$$

$$\rightarrow g(x)=\frac{2}{\pi}h(x)\longrightarrow \boxed{h(x)=\frac{\pi}{2}g(x)}$$

از صورت سؤال داریم : $g(t)=\begin{cases}\cos t & -\pi<t<0\\ \sin t & 0<t<\pi\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$ ، از ما مقدار $h(-\frac{\pi}{2})$ را خواسته است :

$$h(-\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{\pi}{2}g(-\tfrac{\pi}{2})$$

به $t<0$ در تابع اهمیت ندهید چون ؟

* زیرا که چون سینوسی است به گسترش فرد حول $x=0$

$$\rightarrow g(-\tfrac{\pi}{2})=-g(\tfrac{\pi}{2})=-\sin\tfrac{\pi}{2}=-1$$

$$\rightarrow h(-\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{\pi}{2}(-1)=-\tfrac{\pi}{2}\longrightarrow$$ گزینه ۲

* اگر به گسترش فرد بودن اهمیت نمی‌دادید و از $t<0$ در تابع یعنی $\cos t$ استفاده می‌کردید:
بجای گزینه ۲، اشتباها گزینه ۱ را می‌زدید !!!

۶- اگر $F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$ تبدیل فوریهٔ سیگنال $f(t)=\frac{1}{۲}e^{-|t|}$ باشد، آنگاه حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^{۲}dw$ کدام است؟ $(i^{۲}=-۱)$

۱) $\frac{۱}{\pi}$

۲) $\frac{۲}{\pi}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) π

قضیه پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \quad , \quad f(t)=\frac{1}{2}e^{-|t|}$$

$$\rightarrow A=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)^2 dt$$

$$\rightarrow A = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{4}e^{-2|t|}}_{\text{زوج}}dt = 4\pi\int_{0}^{\infty}\frac{1}{4}e^{-2t}dt = \pi\int_{0}^{\infty}e^{-2t}dt$$

$$\rightarrow A = \frac{\pi e^{-2t}}{-2}\Big|_0^{\infty} = \left(\frac{\pi \cancel{e^{-\infty}}^{\,0}}{-2} - \left(\frac{\pi \cancel{e^{-0}}^{\,1}}{-2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

→ گزینه ۳ صحیح است.

۷- مسئلهٔ انتقال حرارت یک بعدی $(x>0\,,\,t>0)$ $u_t = a^2 u_{xx}$ با شرط اولیه $u(x,0)=A$ و شرط کرانه‌ای $u(0,t)=B\big(1-H(t-t_0)\big)$، که در آن H تابع پلهٔ واحد (هوی‌ساید) و $t_0>0$ است، را در نظر بگیرید. اگر $U(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $U(x,s)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{(B-A-Be^{-t_0 s})}{s}e^{\frac{-\sqrt{s}x}{|a|}}-\dfrac{A}{s}$

۲) $\dfrac{(B-A+Be^{-t_0 s})}{s}e^{\frac{\sqrt{s}x}{|a|}}-\dfrac{A}{s}$

۳) $\dfrac{(B-A-Be^{-t_0 s})}{s}e^{\frac{-\sqrt{s}x}{|a|}}+\dfrac{A}{s}$

۴) $\dfrac{(B-A+Be^{-t_0 s})}{s}e^{\frac{-\sqrt{s}x}{|a|}}+\dfrac{A}{s}$

$$u_t = a^2 u_{xx} \xrightarrow{L} sU(x,s) - U(x,0) = a^2 U_{xx}(x,s)$$

$U(x,0)=A$ (از صورت سؤال) $\quad x>0\,,\,t>0$

$$\rightarrow sU(x,s) - A = a^2 U_{xx}(x,s)$$

$$\rightarrow U_{xx}(x,s) - \frac{s}{a^2}U(x,s) = -A \rightarrow U_{h,xx} - \frac{s}{a^2}U_h(x,s) = 0$$

همگن

$$\rightarrow D^2 - \frac{s}{a^2} = 0 \rightarrow D = \pm\frac{\sqrt{s}}{a} \rightarrow U_h(x,s) = C_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

$x>0 \rightarrow x\rightarrow\infty$ باید کران دار $\rightarrow C_1 = 0 \rightarrow U_h(x,s) = C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$

معادله اصلی

$$\rightarrow U_{h,xx} - \frac{s}{a^2}U_h(x,s) = -\frac{A}{a^2} \rightarrow U_p = \frac{1}{D^2 - \frac{s}{a^2}}\left\{-\frac{A}{a^2}\right\}$$

$$\rightarrow U_p = \frac{-A}{a^2D^2 - s}\{1\} \xrightarrow{D=0} U_p = \frac{-A}{-s} = \frac{A}{s}$$

$$\rightarrow U = U_h + U_p = C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x} + \frac{A}{s}$$

شرط مرزی $\rightarrow u(0,t) = B\big(1-H(t-t_0)\big) = B - BH(t-t_0)$

$$\rightarrow U(0,s) = \frac{B}{s} - \frac{Be^{-t_0 s}}{s} = C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}0} + \frac{A}{s}$$

گزینه ۳

$$\rightarrow C_2 = \frac{B-A-Be^{-t_0 s}}{s} \rightarrow \boxed{U(x,s) = \frac{B-A-Be^{-t_0 s}}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x} + \frac{A}{s}}$$

۸- نقاط غیرتحلیلی شاخهٔ اصلی تابع $f(z)=\log\left(1-iz^2\right)$، کدامند؟

۱) $\left\{z=x+iy \,\middle|\, y=x \ , \ |x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

۲) $\left\{z=x+iy \,\middle|\, y=x \ , \ |x|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

۳) $\left\{z=x+iy \,\middle|\, y=-x \ , \ |x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

۴) $\left\{z=x+iy \,\middle|\, y=-x \ , \ |x|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$$f(z)=\log(1-iz^2)$$

$$\rightarrow f(z)=\log(1-i(x^2-y^2+2ixy))=\log(1+2xy+i(y^2-x^2))$$

$$\log(u+iv) \quad \begin{cases} u=1+2xy \\ v=y^2-x^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(z)=\log\sqrt{u^2+v^2}+i\tan^{-1}\frac{v}{u}$$

بریدگی شاخه‌ای اصلی ← نقاط غیرتحلیلی

$$\rightarrow v=0 \rightarrow y^2=x^2 \rightarrow y \begin{cases} +x \\ -x \end{cases}$$

$$u=1+2xy<0$$

$$\rightarrow \text{if } y=+x \rightarrow u=1+2x^2<0$$ ← غیرقابل ممکن

$$\rightarrow \text{if } y=-x \rightarrow u=1-2x^2<0 \rightarrow \frac{1}{2}<x^2 \rightarrow |x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y=-x \\ |x|>\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow$$ گزینه ۴

۹- حاصل عبارت $\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta$ ، کدام است؟ ($i^2=-1$)

۱) π

۲) $2\pi i$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{\pi}{2}i$

$$A = \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta$$

$$z = 1e^{i\theta}$$ (دایره به شعاع واحد) $$\rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\frac{dz}{iz} = d\theta$$

$$\rightarrow A = \oint_{|z|=1} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2z\right)\frac{dz}{iz}$$

$$\rightarrow A = \oint_{|z|=1} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2z\right)}{iz}dz \rightarrow z=0$$ قطب ساده

$$\rightarrow A = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2z\right)}{iz}\right\} = 2\pi \cancel{i} \lim_{z\to 0} \cancel{z}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2z\right)}{\cancel{i}\cancel{z}}$$

$$\rightarrow A = 2\pi \sin^2\frac{\pi}{6} = 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$ گزینه ۳

۱۰- فرض کنید $a \in (-1,1)$ یک عدد حقیقی و $z = ae^{i\theta}$ باشد. با استفاده از سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos\frac{n\pi}{3}$، کدام است؟

۱) $\dfrac{a-2a^2}{(1-a)^2}$

۲) $\dfrac{2a^2-a}{(1-a)^2}$

۳) $\dfrac{2a^2-a}{2(1-a+a^2)}$

۴) $\dfrac{a-2a^2}{2(1-a+a^2)}$

$$z = ae^{i\theta} \longrightarrow A = \sum z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{in\theta}$$

$$1 + ae^{i\theta} + a^2 e^{2i\theta} + a^3 e^{3i\theta} + \cdots \longrightarrow$$ سری هندسی، $ae^{i\theta}$

$$\longrightarrow A = \frac{a^0 e^{i0\theta}}{1-ae^{i\theta}} = \frac{1}{1-ae^{i\theta}}$$

$$, \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\text{if } \theta = \frac{\pi}{3} \longrightarrow A = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right) + ia^n\left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

$$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\frac{n\pi}{3} = \mathrm{Re}\{A\}$$

صورت سؤال $\sum_{n=1}^{\infty}$ را خواسته است.

$$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\frac{n\pi}{3} = a^0\cos 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos\frac{n\pi}{3} = \mathrm{Re}\{A\}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos\frac{n\pi}{3} = \mathrm{Re}\{A\} - 1 = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-ae^{i\frac{\pi}{3}}}\right\} - 1$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-a\cos\frac{\pi}{3} - ai\sin\frac{\pi}{3}}\right\} - 1 = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-\frac{a}{2}-ai\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\} - 1$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{1-\frac{a}{2}+ai\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} - 1 = \frac{1-\frac{a}{2}}{1+\frac{a^2}{4}-a+\frac{3a^2}{4}} - 1 = \frac{1-\frac{a}{2}}{1+a^2-a} - 1$$

$$= \frac{\cancel{1}-\frac{a}{2}-\cancel{1}-a^2+a}{1+a^2-a} = \frac{\frac{a}{2}-a^2}{1+a^2-a} = \frac{a-2a^2}{2(1+a^2-a)} \longrightarrow$$ گزینه ۴

۱۱- مسئلهٔ پواسن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \begin{cases} 2 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} , \quad 0<y<\pi \\ u(x,0)=u(x,\pi)=0 \end{cases}$$

اگر $U_w(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-iwx}dx = c_1e^{-wy}+c_2e^{wy}+B_w$ تبدیل فوریهٔ $u(x,y)$ باشد، مقدار c_1 کدام است؟

۱) $\frac{(e^{-\pi w}-1)\sin w}{\pi w^3 \sinh(\pi w)}$

۲) $\frac{(e^{\pi w}-1)\sin w}{\pi w^3 \sinh(\pi w)}$

۳) $\frac{(1-e^{-\pi w})\sin(\pi w)}{\pi w^3 \sinh(w)}$

۴) $\frac{(1-e^{\pi w})\sin w}{\pi w^3 \sinh(w)}$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \begin{cases} 2 & : |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} = 2\begin{cases} 1 & : |x|<1 \\ 0 & : |x|>1 \end{cases} = f(x) \\ u(x,0)=u(x,\pi)=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{فوریه}} F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1\end{cases}\right)e^{-i\omega x}dx$$

$$\rightarrow F(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\pi}\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\frac{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{-i\omega}=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

معادله اصلی $\rightarrow \nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x) \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{تبدیل فوریه}}$

$$\rightarrow -\omega^2 U(\omega,y)+U_{yy}(\omega,y)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega} \rightarrow \boxed{U_{yy}-\omega^2 U=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}}$$

$$\rightarrow U_h: D^2-\omega^2=0 \rightarrow D=\pm\omega \rightarrow U_h=C_1e^{\omega y}+C_2e^{-\omega y}$$

جواب عمومی

$$\rightarrow U_p=\frac{1}{D^2-\omega^2}\left\{\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\right\}=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\frac{1}{D^2-\omega^2}\{1\}$$

جواب خصوصی

$$\rightarrow U_p=-\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3} \rightarrow U=U_h+U_p$$

$$\rightarrow U=C_1e^{-\omega y}+C_2e^{+\omega y}-\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3} \quad \text{شرایط مرزی} \begin{cases} U(x,0)=0 \\ U(x,\pi)=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} U(\omega,0)=0 \rightarrow C_1+C_2-\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3}=0 \rightarrow C_2=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3}-C_1 \\ U(\omega,\pi)=0 \rightarrow C_1e^{-\omega\pi}+C_2e^{+\omega\pi}-\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3}=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow C_1e^{-\omega\pi}+\left(\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3}-C_1\right)e^{\omega\pi}=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3} \rightarrow C_1=\frac{\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3}(1-e^{\omega\pi})}{e^{-\pi\omega}-e^{\pi\omega}}$$

$$\rightarrow C_1=\frac{\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^3}(1-e^{\pi\omega})}{-\frac{e^{\pi\omega}-e^{-\pi\omega}}{2}\times 2}=\frac{\sin\omega(e^{\pi\omega}-1)}{\pi\omega^3\sinh\pi\omega} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۱۲- فرض کنید $f(x)=(\cos x+2\sin x-2)^2$ در $-\pi<x<\pi$ تعریف شده و متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد. اگر $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ سری فوریهٔ تابع f باشد، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ کدام است؟

۱) $\frac{153}{8}$

۲) $\frac{153}{4}$

۳) $\frac{77}{2}$

۴) $\frac{39}{2}$

$$f(x)=(\cos x+2\sin x-2)^2$$

$$\rightarrow f(x)=\cos^2 x+4\sin^2 x+4+4\cos x\sin x-4\cos x-8\sin x$$

$$\frac{1+\cos 2x}{2} \quad 4\,\frac{1-\cos 2x}{2} \quad 4\,\frac{\sin 2x}{2}$$

$$\rightarrow f(x)=4+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+2-2\cos 2x+2\sin 2x-4\cos x-8\sin x$$

$$\rightarrow f(x)=\left(\frac{13}{2}-4\cos x-\frac{3}{2}\cos 2x\right)+\left(-8\sin x+2\sin 2x\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_0=\frac{13}{2}\,,\ a_1=-4\,,\ a_2=-\frac{3}{2}\,,\ a_3,a_4,a_5,\dots=0 \\ b_1=-8\,,\ b_2=2\,,\ b_3,b_4,b_5,\dots=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2$$

$$\rightarrow A=16+\frac{9}{4}+64+4=\frac{64+9+256+16}{4}=\frac{345}{4}$$

که هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست!!!

۱۳- ضریب z^{-2} در بسط لوران تابع $f(z) = z\sin\left(z-\frac{1}{z}\right)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{3!6!}+\frac{1}{4!7!}+\frac{1}{5!8!}+\cdots$

۲) $\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!5!}-\frac{1}{3!4!}+\frac{1}{4!7!}-\frac{1}{5!8!}+\cdots$

۳) $-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{3!4!}-\frac{1}{4!7!}+\frac{1}{5!8!}-\cdots$

۴) $-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{3!4!}-\frac{1}{4!7!}-\frac{1}{5!8!}+\cdots$

$f(z) = z\sin\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\rightarrow f(z) = z\left(\sin z\cos\frac{1}{z} - \sin\frac{1}{z}\cos z\right) = \overset{A}{z\sin z\cos\frac{1}{z}} - \overset{B}{z\sin\frac{1}{z}\cos z}$

$\rightarrow A = z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\left(1-\frac{(\frac{1}{z})^2}{2!}+\frac{(\frac{1}{z})^4}{4!}\cdots\right)$

$\rightarrow B = z\left(\frac{1}{z}-\frac{(\frac{1}{z})^3}{3!}+\frac{(\frac{1}{z})^5}{5!}\cdots\right)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)$

ضریب z^{-2} در A:

$\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!6!}+\frac{1}{5!8!}+\frac{1}{7!10!}+\cdots$

ضریب z^{-2} در B:

$\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{4!7!}+\frac{1}{6!9!}+\cdots$

$\rightarrow$ جواب $= \frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{3!6!}+\frac{1}{4!7!}+\frac{1}{5!8!}+\cdots$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۴- فرض کنید $f(z)=\left(1+z^{2}+z^{3}\right)e^{\frac{1}{z}}$ باشد. حاصل انتگرال $\oint_{|z|=2}\frac{f(z)dz}{z^{2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{7\pi i}{3}$

۲) $\frac{14\pi i}{3}$

۳) $\frac{25\pi i}{12}$

۴) $\frac{25\pi i}{24}$

$$f(z)=\left(1+z^{2}+z^{3}\right)e^{\frac{1}{z}} \longrightarrow \oint_{|z|=2}\frac{f(z)dz}{z^{2}}=?$$

$$\rightarrow \oint_{|z|=2}\frac{\left(1+z^{2}+z^{3}\right)}{z^{2}}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2}}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{3}}{3!}+\dots\right)dz = 2\pi i \, \text{Res} @ z=0$$

$$\rightarrow 2\pi i\left(\sum \tfrac{1}{z}\ \text{ضرایب}\right)=2\pi i\left(1+\frac{1}{2}\right)=3\pi i$$

هیچ کدام از گزینه ها درست نیست!!

۱۵- حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^{3} x}{x^{2}+1}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(e^{2}+3)}{4e^{3}}$

۲) $\frac{\pi(3e^{2}+1)}{8e^{3}}$

۳) $\frac{\pi(e^{2}+3)}{8e^{3}}$

۴) $\frac{\pi(3e^{2}+1)}{4e^{3}}$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^{3}x}{x^{2}+1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\cos x+\cos 3x}{4(x^{2}+1)}dx$$

$$\rightarrow I=\underbrace{\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{2}+1}dx}_{I_1}+\underbrace{\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^{2}+1}dx}_{I_2}$$

$$\rightarrow I_1=\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{2}+1}dx \longrightarrow \begin{cases} z=i & \text{بالای محور} \\ z=-i \end{cases}$$

$$\rightarrow I_2=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^{2}+1}dx \longrightarrow \begin{cases} z=i & \text{بالای محور} \\ z=-i \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1=\frac{3}{4}\times 2\pi i\times \underset{z\to i}{\text{Res}}\left\{\frac{e^{iz}}{z^{2}+1}\right\}=\frac{3\pi i}{2}\lim_{z\to i}\frac{\cancel{(z-i)}e^{iz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)}=\frac{3\pi i\,e^{-1}}{4i}$$

$$\rightarrow I_2=\frac{1}{4}\times 2\pi i\times \underset{z\to i}{\text{Res}}\left\{\frac{e^{3iz}}{z^{2}+1}\right\}=\frac{\pi i}{2}\lim_{z\to i}\frac{\cancel{(z-i)}e^{3iz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)}=\frac{\pi i\,e^{-3}}{4i}$$

$$\rightarrow I=\frac{3\pi}{4}e^{-1}+\frac{\pi}{4}e^{-3}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{e}+\frac{1}{e^{3}}\right)=\frac{\pi}{4}\,\frac{3e^{2}+1}{e^{3}}$$

گزینه ۴