پاسخ تشریحی کنکور ارشد ۹۵ مکانیک

ریاضیات پایه: استاد انصاری(موسسه پارسه)

ریاضی مهندسی و معادلات : دکتر شادلو (موسسه پارسه)

سیالات: استاد سرلک (موسسه پارسه)

جامدات و دینامیک ارتعاشات : مهندس طالب پور

این پاسخ تشریحی گردآوری شده توسط تیم مدیریتی

@mechexam

مرجع کنکور ارشد و دکتری مکانیک می باشد.

لینک کانال

https://telegram.me/joinchat/BjuPEj-xCBnboYeKuYCc9Q

لینک گروه:

https://telegram.me/joinchat/BjuPEj86rpdYrn3ojPCdTQ

31 - گزینه 2 درست است.

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$$

یادآوری: $\sqrt[n]{(kn)!} \simeq \left(\frac{kn}{e}\right)^k$ ، $n \to \infty$

اگر طرفین را به توان n برسانیم داریم:

$$\lim_{n \to \infty} (kn)! \simeq \left(\frac{kn}{e}\right)^{nk}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^n \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4^n}{4^n} = 1$$

چون حد ضابطه سری شرط لازم همگرایی را ندارد، سری واگرا خواهد بود.

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\operatorname{Sh}\left(\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{Sh}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

در $n \to \infty$ داریم $\frac{1}{n} \to 0$ که بدان معنی است که می توان از هم ارزی استفاده کرد.

$$J \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{1} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \ln 1 \simeq \sum_{n=1}^{\infty} 0 \simeq 0$$

سری J همگرا به صفر خواهد بود.

32- گزینه 3 درست است.

$$f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1} \longrightarrow (f^{-1})'(2) = ?$$

معکوس: $x=2 \Rightarrow$ تابع: $y=2 \Rightarrow 2 = \frac{4x^3}{x^2+1}$

$$4x^3 = 2x^2+2 \Rightarrow 4x^3-2x^2-2=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0} x=1$$

تابع: $(1,2) \Rightarrow$ معکوس: $(2,1)$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left(\frac{12x^2(x^2+1)-2x(4x^3)}{(x^2+1)^2}\right)\Bigg|_{x=1}}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{\frac{24-8}{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

33- گزینه ی 3 درست است.

$$\begin{cases} x = \cos 3\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2\cos\theta}{-3\sin 3\theta}$$

چون خط مماس موازی محور y ها معرفی شده است باید شیب خط مماس ∞ شود

یعنی $\frac{dy}{dx} \to \infty$ که برای این منظور باید:

$$\sin 3\theta = 0 \Rightarrow 3\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{3}$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \Rightarrow$$ 6 نقطه

34- گزینه 4 درست است.

$$f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt \longrightarrow f'(x)=\frac{\ln x}{x+1}$$

$$y=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} y'=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y'=\frac{\ln x}{x+1}-\frac{1}{x^2}\times\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}$$

$$y'=\frac{\ln x}{x+1}-\frac{1}{x^2}\times\frac{-\ln x}{\frac{1+x}{x}}$$

$$y'=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x^2}\times\frac{x\ln x}{1+x} \longrightarrow y'=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x+1}$$

$$y'=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{\ln x}{x(x+1)} \longrightarrow y'=\frac{x\ln x+\ln x}{x(x+1)}$$

$$y'=\frac{\ln x\,(x+1)}{x(x+1)} \longrightarrow y'=\frac{\ln x}{x}$$

$$\xrightarrow{\int} y=\int\frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow y=\int\frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$$y=\frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

با در نظر گرفتن $c=0$ جواب $y=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ خواهد بود.

35 - گزینه 3 درست است.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$$

$$x=\frac{\pi}{2}-t \longrightarrow t=\frac{\pi}{2}-x \longrightarrow dx=-dt$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow t=0 \\ x=0 \longrightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)$$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^3 t+\cos^3 t}\,dt$$

چون در انتگرال معین متغیر مجازی است تفاوتی بین t و x وجود ندارد

$$\begin{cases} I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx \\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx \end{cases}$$

$$I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 t}+\frac{\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\right)dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin 2x}\,dx \Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{2-\sin 2x}\,dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 - \sin 2x}\, dx$$

$$\sin 2x = \frac{2\,tg\,x}{1+tg^2 x} \longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 - \frac{2\,tg\,x}{1+tg^2 x}}\, dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2 x}{2+2tg^2 x - 2tg\,x}\, dx \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2 x}{2(tg^2 x - tg\,x + 1)}\, dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2 x}{tg^2 x - tg\,x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}\, dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2 x}{(tg\,x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dx$$

$$tg\,x = t \longrightarrow (1+tg^2 x)\,dx = dt \longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow tg\frac{\pi}{2} = t \longrightarrow t = \infty \\ x = 0 \longrightarrow tg\,0 = t \longrightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \times \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dt$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\, Arctg\, \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, Arctg\, \frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

36- گزینه ۱ درست است.

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial u} \Rightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}$$

$$-\frac{y}{x}=-\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} \Rightarrow \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{y}{x}$$

با توجه به گزینه‌ها فرم کلی $\begin{cases} x=e^{\alpha u+\beta v} \\ y=e^{au+bv} \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{a e^{au+bv}}{\alpha e^{\alpha u+\beta v}}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{ay}{\alpha x}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{a}{\alpha}=1 \longrightarrow a=\alpha$$

نتیجه بدست آمده تصریح می‌کند که باید $a=\alpha$ باشد و البته هیچ محدودیتی برای a و β وجود ندارد لذا کامل‌ترین گزینه، گزینه ۱ خواهد بود.

البته که گزینه ۲ نیز درست است ولی حتماً گزینه ۱ کامل‌تر است.

37- گزینه 2 درست است.

$$I = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, ds$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = +\hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(3x^2+3y^2)$$

چون سطح ایجاد شده روی صفحه $2x+2y+z=3$ قرار دارد، $\vec{n}$ بردار یکه عمود به سمت خارج سطح از رابطه زیر بدست می‌آید

$$S:\ 2x+2y+z-3=0$$

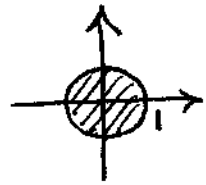
$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}S}{|\vec{\nabla}S|} = \frac{2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}}{3}$$

$$z = 3-2x-2y \xrightarrow{ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy} ds = \sqrt{1+4+4}\,dxdy$$

$$I = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D \left(3(x^2+y^2)\hat{k}\right)\cdot\frac{2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}}{3}\, 3\,dxdy$$

$$I = \iint_D 3(x^2+y^2)\,dxdy$$

تصویر در صفحه xy $D: x^2+y^2=1$



$$\xrightarrow{\text{قطبی}} I = \iint_D 3r^2\times r\,dr\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta$$

$$I = 3\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = 3\left(\frac{1}{4}\right)(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

38- گزینه 4 درست است.

مساحت روی سهمی‌گون $x = 4-y^2-z^2$ و بالای حلقه $1 \leqslant y^2+z^2 \leqslant 4$ هم

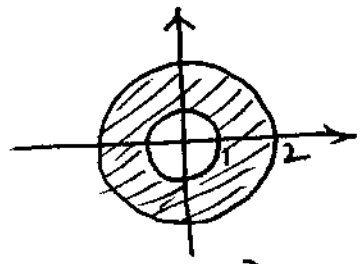
تفاوتی با مساحت روی سهمی‌گون $z = 4-y^2-x^2$ و بالای حلقه $1 \leqslant y^2+x^2 \leqslant 4$ ندارد

$$S = \iint 1\,ds$$

$$z = 4-y^2-x^2 \xrightarrow{ds = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy} ds = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$S = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

تصویر در صفحه xy $D: 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$



$$\xrightarrow{\text{قطبی}} S = \iint_D \sqrt{1+4r^2} \times r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$$

$$S = \left(\frac{1}{8} \times \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$S = \frac{1}{12}\left((1+4r^2)\sqrt{1+4r^2}\right)\Big|_1^2 \left(2\pi\right)$$

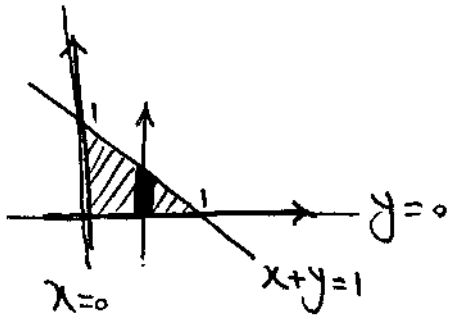
$$S = \frac{2\pi}{12}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right) = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$$

39- گزینه ۱ درست است.

با توجه به بسته بودن مسیر و پیوسته بودن توابع در انتگرال از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$I = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$I = \oint_C \underbrace{y^2}_{P}\,dx + \underbrace{x^2}_{Q}\,dy = \iint_D (2x - 2y)\,dx\,dy$$



$$I = 2\int_0^1 \int_0^{1-x} (x-y)\,dy\,dx = 2\int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx$$

$$I = 2\int_0^1 \left(x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx$$

$$I = 2\int_0^1 \left(x - x^2 - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$I = 2\int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$I = 2\left(-\frac{3}{2} \times \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1$$

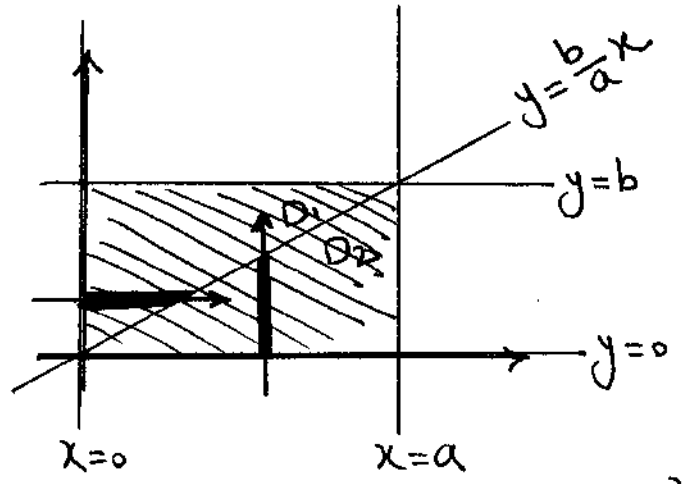
$$I = 2\left(\frac{-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

40- گزینه ۱ درست است.

$$I=\int_0^a\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,\,a^2y^2\}}\,dy\,dx$$

$$b^2x^2=a^2y^2 \xrightarrow{a,b>0} bx=ay \longrightarrow y=\frac{b}{a}x$$

خط $y=\frac{b}{a}x$ از دو نقطه $(0,0)$ و (a,b) عبور می‌کند لذا در ناحیه داریم:



$$D_1:\ y>\frac{b}{a}x \longrightarrow ay>bx \longrightarrow a^2y^2>b^2x^2$$

$$D_2:\ y<\frac{b}{a}x \longrightarrow ay<bx \longrightarrow a^2y^2<b^2x^2$$

$$I=\iint_{D_1} e^{a^2y^2}\,dx\,dy+\iint_{D_2} e^{b^2x^2}\,dx\,dy$$

$$I=\int_0^b\int_0^{\frac{a}{b}y} e^{a^2y^2}\,dx\,dy+\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}x} e^{b^2x^2}\,dy\,dx$$

$$I=\int_0^b e^{a^2y^2}\left(x\Big|_0^{\frac{a}{b}y}\right)dy+\int_0^a e^{b^2x^2}\left(y\Big|_0^{\frac{b}{a}x}\right)dx$$

$$I=\frac{a}{b}\int_0^b y\,e^{a^2y^2}\,dy+\frac{b}{a}\int_0^a x\,e^{b^2x^2}\,dx$$

$$I=\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2a^2}e^{a^2y^2}\Big|_0^b\right)+\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2b^2}e^{b^2x^2}\Big|_0^a\right)$$

$$I=\frac{1}{2ab}\left(e^{a^2b^2}-1\right)+\frac{1}{2ab}\left(e^{a^2b^2}-1\right)=2\,\frac{e^{a^2b^2}-1}{2ab}$$

a^2b^2

41- گزینه 2 درست است.

$$\begin{cases} 2xy' + 3xy - 1 = -4x^2 + \ln x \\ y(1) = \end{cases}$$

$$2xy' + 3xy - 1 = -4x^2 + \ln x \xrightarrow{(1,-1)} 2y' - 3 - 1 = -4 + 0 \longrightarrow y' = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2y' + 2xy'' + 3y + 3xy' = -8x + \frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow[y'=0]{(1,-1)} 0 + 2y'' - 3 - 3 = -8 + 1 \longrightarrow 2y'' = -1 \longrightarrow y'' = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' = \frac{-1}{2} < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$ نقطه Max نسبی است

42- گزینه 3 درست است.

$$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3$$

$$(e^x - 3x^2y^2)\,dy = (2xy^3 - ye^x)\,dx$$

$$\underbrace{(ye^x - 2xy^3)}_{P}dx + \underbrace{(e^x - 3x^2y^2)}_{Q}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x - 6xy^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x - 6xy^2$$

$\Rightarrow$ معادله دیفرانسیل کامل است

$$u = \int P\,dx = \int (ye^x - 2xy^3)\,dx = ye^x - x^2y^3$$

$$u = \int Q\,dy = \int (e^x - 3x^2y^2)\,dy = ye^x - x^2y^3$$

$u =$ اجتماع جوابها $\Rightarrow u = ye^x - x^2y^3$

جواب معادله دیفرانسیل : $u = C \Rightarrow ye^x - x^2y^3 = C$

43- گزینه 3 درست است.

$$x'' + \alpha x' + \beta x = \theta \delta(t)$$

از طرفین تساوی تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\left(s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)\right) + \alpha\left(s X(s) - x(0)\right) + \beta X(s) = \theta \mathcal{L}(\delta(t))$$

$$s^2 X(s) - s x(0) + \cancel{\alpha x'(0)} + \alpha s X(s) - \cancel{\alpha x(0)} + \beta X(s) = \theta \times 1$$

$$(s^2 + \alpha s + \beta) X(s) = \theta + s x(0) \Rightarrow X(s) = \frac{\theta + s x(0)}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

$$s^2 + \alpha s + \beta = 0 \longrightarrow \Delta = \alpha^2 - 4\beta \Rightarrow \Delta = -4\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)$$

$$\xrightarrow{\beta - \frac{\alpha^2}{4} = -\mu^2} \Delta = -4(-\mu^2) \longrightarrow \Delta = 4\mu^2$$

$$s^2 + \alpha s + \beta = 0 \longrightarrow s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{4\mu^2}}{2}$$

$$\begin{cases} s = \dfrac{-\alpha + 2\mu}{2} = \mu - \dfrac{\alpha}{2} \\ s = \dfrac{-\alpha - 2\mu}{2} = -\mu - \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s^2 + \alpha s + \beta = \left(s - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(s - \left(-\mu - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$X(s) = \frac{\theta + s x(0)}{\left(s - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(s - \left(-\mu - \frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{A}{s - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{B}{s - \left(-\mu - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$A = \left.\frac{\theta + s x(0)}{s - \left(-\mu - \frac{\alpha}{2}\right)}\right|_{s = \mu - \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow A = \frac{\theta + \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right) x(0)}{2\mu}$$

$$B = \left.\frac{\theta + s x(0)}{s - \left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)}\right|_{s = -\mu - \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow B = \frac{\theta + \left(-\mu - \frac{\alpha}{2}\right) x(0)}{-2\mu}$$

$$X(s) = \frac{A}{s-(\mu-\frac{\alpha}{2})} + \frac{B}{s-(-\mu-\frac{\alpha}{2})}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s-(\mu-\frac{\alpha}{2})} + \frac{B}{s-(-\mu-\frac{\alpha}{2})}\right)$$

$$x(t) = A\,e^{(\mu-\frac{\alpha}{2})t} + B\,e^{(-\mu-\frac{\alpha}{2})t}$$

$$x(t) = \frac{\theta+(\mu-\frac{\alpha}{2})x(0)}{2\mu}\,e^{(\mu-\frac{\alpha}{2})t} + \frac{\theta+(-\mu-\frac{\alpha}{2})x(0)}{-2\mu}\,e^{(-\mu-\frac{\alpha}{2})t}$$

$$x(t) = \frac{x(0)(\mu-\frac{\alpha}{2})+\theta}{2\mu}\,e^{(\mu-\frac{\alpha}{2})t} + \frac{x(0)(\mu+\frac{\alpha}{2})-\theta}{2\mu}\,e^{(-\mu-\frac{\alpha}{2})t}$$

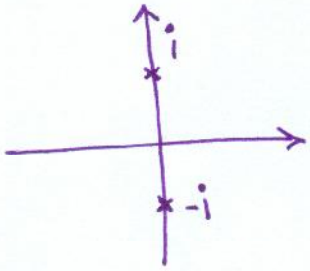
44- گزینه 1 درست است.

$$(1+x^2)y''+y=0$$

$$y''+\frac{1}{1+x^2}y=0 \xrightarrow{\text{نقاط تکین}} 1+x^2=0 \rightarrow x=\pm i$$

چون معادله نقطه تکین دارد گزینه 4 غلط است.

البته گزینه 3 اساسا غلط است، به عنوان مثال معادله دیفرانسیل $x^2y''=0$ که در آن با تبدیل $x\to -x$ معادله هیچ تغییری نمی کند، جوابی به فرم $y=Ax+B$ دارد که شامل توان های فرد x نیز می تواند باشد.



چون معادله دیفرانسیل دارای نقطه تکین است، شعاع همگرایی جواب معادله دیفرانسیل برابر با Min فاصله نقطه x_0 (نقطه x_0، نقطه ای است که قرار است جواب معادله دیفرانسیل به فرم سری حول آن نقطه بیان شود.) تا نقاط تکین است لذا نمی تواند شعاع همگرایی ∞ باشد یا به عبارتی برای همه x ها همگرا باشد.

45- گزینه 1 درست است.

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{t}x + \frac{1}{t}y & \text{(I)} \\ y' = -\frac{4}{t}x - \frac{1}{t}y & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{t}y = x' - \frac{3}{t}x \longrightarrow y = tx' - 3x$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} y' = x' + tx'' - 3x'$$

$$\text{(II)} \quad x' + tx'' - 3x' = -\frac{4}{t}x - \left(x' - \frac{3}{t}x\right)$$

$$x' + tx'' - 3x' + \frac{4}{t}x + x' - \frac{3}{t}x = 0$$

$$tx'' - x' + \frac{1}{t}x = 0 \xrightarrow{\times t} t^2x'' - tx' + x = 0$$

معادله مشخصه کوشی اویلر : $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ و

$$x(t) = At + Bt\ln t$$

$$\text{(II)} \quad \frac{4}{t}x = -y' - \frac{1}{t}y \Rightarrow x = -\frac{t}{4}y' - \frac{1}{4}y$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} x' = -\frac{1}{4}y' - \frac{t}{4}y'' - \frac{1}{4}y'$$

$$\text{(I)} \quad \frac{-1}{4}y' - \frac{t}{4}y'' - \frac{1}{4}y' = \frac{3}{t}\left(-\frac{t}{4}y' - \frac{1}{4}y\right) + \frac{1}{t}y$$

$$\frac{-1}{4}y' - \frac{t}{4}y'' - \frac{1}{4}y' + \frac{3}{4}y' + \frac{3}{4t}y - \frac{1}{t}y = 0$$

$$-\frac{t}{4}y'' + \frac{1}{4}y' - \frac{1}{4t}y = 0 \xrightarrow{\times(-4t)} t^2y'' - ty' + y = 0$$

معادله مشخصه کوشی اویلر : $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ و

$$y = c_1t + c_2t\ln t$$

$$y = c_1 t + c_2 t \ln t \xrightarrow{\frac{d}{dt}} y' = c_1 + c_2 \ln t + c_2$$

$$x = At + Bt \ln t$$

(II) $y' = -\frac{4}{t}x - \frac{1}{t}y$

$$c_1 + c_2 \ln t + c_2 = -\frac{4}{t}\left(At + Bt\ln t\right) - \frac{1}{t}\left(c_1 t + c_2 t \ln t\right)$$

$$c_1 + c_2 + c_2 \ln t = -4A - 4B\ln t - c_1 - c_2 \ln t$$

$$2c_1 + c_2 + 2c_2 \ln t = -4A - 4B\ln t$$

$$-4A = 2c_1 + c_2 \longrightarrow A = -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{4} \longrightarrow A = -\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4}\right)$$

$$-4B = 2c_2 \longrightarrow B = -\frac{c_2}{2}$$

$$y = c_1 t + c_2 t \ln t$$

$$x = -\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4}\right)t - \frac{c_2}{2} t \ln t$$

46- گزینه 4 درست است.

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$$

$$\xrightarrow{n=\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}}(x) = i^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(ix)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi i x}} \sin(ix)$$

$$\longrightarrow I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt{\frac{2}{\pi i x}} \sin(ix$$

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{i}} \times \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \times \frac{1}{\sqrt{i}} \sin(ix)$$

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(ix)$$

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \times i \sinh x$$

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh x$$

«به نام خدا»

پاسخ ریاضی مهندسی کنکور کارشناسی ارشد ۹۵ - رشته مهندسی مکانیک

برای سری دفترچه A

پاسخ سؤال شماره ۴۷ : گزینه ۱ صحیح است.

از آن جا که تابع تحلیلی است بنابراین :

$$f'(z) = u_x + i v_x = v_y + i v_x$$

$$v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \cosh x \cos y \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \sinh x \cos y \\ v_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \cosh x \sin y \end{cases}$$

$$i \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = -\sin(1) \end{cases}$$

بنابراین : $f'(i) = i - \sin(1)$ ۱ ☑

پاسخ سؤال شماره ۴۸ :

$$w = z + \frac{1}{z} \longrightarrow \begin{cases} u = (r + \frac{1}{r}) \cos\theta \\ v = (r - \frac{1}{r}) \sin\theta \end{cases}$$

$$r = 2 \longrightarrow \begin{cases} u = \frac{5}{2} \cos\theta \\ v = \frac{3}{2} \sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } \theta} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{u^2}{(5/2)^2} + \frac{v^2}{(3/2)^2} = 1$$

گزینه ۴ صحیح است ✓ ۴ ☑

پاسخ سؤال شماره ۴۹: گزینه ۳ صحیح است.

تکین تابع: $z=0$ (تکین اساسی)

$$f(z)=e^{z}e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots\right)$$

ضریب $\frac{1}{z}$ $=1+\frac{1}{1!\,2!}+\frac{1}{2!\,3!}+\frac{1}{3!\,4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}$$ ۳ ☑

پاسخ سؤال شماره ۵۰: حل دالامبر معادله موج متناهی است

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(x)\,dx & x>ct\\ H\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(f(x+ct)-f(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct}g(x)\,dx & x<ct\end{cases}$$

** باید توجه کنیم که $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب تابع و مکان و سرعت اولیه هستند و H تابع شرط مرزی ناهمگن نظیر است.

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+3t+x-3t) & x>3t\\ e^{t-x/3}+\frac{1}{2}(x+3t-(3t-x)) & x<3t\end{cases}$$

$$u(3,2)=e^{2-1}+\frac{1}{2}(3(2))=3+e$$ ۳ ☑

گزینه 3 صحیح است.

پاسخ تشریحی کنکور 95 (مکانیک)

۵۱- برای یک گاز آرمانی، معادلهٔ حالت $PV = RT$ و گرمای ویژه در فشار ثابت، ثابت می‌باشد ($c_p = const$). گزینهٔ درست کدام است؟ ($k = \frac{c_p}{c_v}$)

۱) $du = \frac{1}{k-1} d(PV)$

۲) $du = \frac{k}{k-1} d(PV)$

۳) $du = (k-1) d(PV)$

۴) $du = k d(PV)$

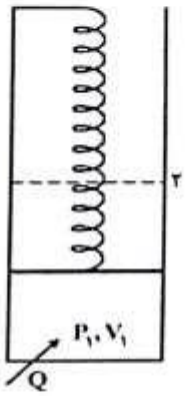
$du = c_v dT$

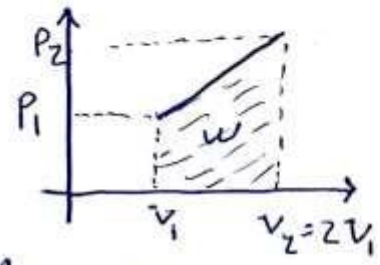
پاسخ گزینه ۱:

$RT = PV \Rightarrow R\,dT = d(PV) \Rightarrow dT = \frac{d(PV)}{R}$

$du = c_v dT = \frac{c_v}{R} d(PV) = \frac{c_v}{c_p - c_v} d(PV) = \frac{1}{k-1} d(PV)$

۵۲- سیلندر و پیستون زیر به یک فنر خطی متصل و فشار و حجم اولیهٔ آن P_1 و V_1 است. به سیلندر حرارت می‌دهیم تا حجمش دو برابر شود. در این لحظه فشارش P_2 است. مقدار حرارت داده شده به سیلندر، کدام است؟





۱) $U_2 - U_1 + (\frac{P_1 + P_2}{2}) V_2$

۲) $U_2 - U_1 + (\frac{P_1 + P_2}{2}) V_1$

۳) $U_2 - U_1 + P_1(V_2 - V_1)$

۴) $U_2 - U_1 + P_2(V_2 - V_1)$

پاسخ گزینه 2:

$\Delta U = Q - w$

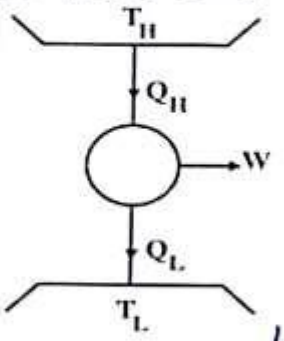
$Q = \Delta U + w = U_2 - U_1 + w$

که w مساحت زیر سطح نمودار است

$w = \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)(2V_1 - V_1) = \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) V_1$

* وقتی نیروی فنر خطی است تغییرات نیروی وارد بر سطح پیستون خطی و در نتیجه فشار خطی است.

۵۳- در ماشین حرارتی زیر، اگر S_{gen} تولید انتروپی ناشی از برگشت‌ناپذیری ماشین باشد، راندمان حرارتی η_{th} برابر کدام است؟



۱) $1-\frac{T_L}{Q_L}(S_{gen}+\frac{Q_L}{T_H})$

۲) $1-\frac{T_L}{Q_H}(S_{gen}-\frac{Q_H}{T_H})$

۳) $1-\frac{T_L}{Q_H}(S_{gen}+\frac{Q_H}{T_H})$

۴) $1-\frac{T_L}{T_H}$

نکته: تست مربوط به روش رد گزینه نیز پاسخ دارد.

پاسخ گزینه 3 (مشابه تست دکترای مکانیک ۹۱)

$$\eta_{th} = \frac{W_{net} - T_0 S_{gen}}{Q_H} = \frac{W_{net}}{Q_H} - \frac{T_0 S_{gen}}{Q_H}$$

$$= 1 - \frac{T_L}{T_H} - \frac{T_0 S_{gen}}{Q_H}$$

که معمولاً دمای محیط را دمای T_L در نظر می‌گیرند

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_L}{T_H} - \frac{T_L S_{gen}}{Q_H} \rightarrow$$ که ساده شده گزینه 3 می‌باشد

۵۴- سوخت متان (CH_4) با ده درصد هوای اضافی و سوخت اتیلن (C_2H_4) با همان مقدار درصد هوای اضافی در دو اتاق احتراق متفاوت می‌سوزند. در حاصل احتراق، تنها ترکیبات کامل وجود دارد. در خصوص دمای نقطهٔ شبنم (T_{DP}) گازهای حاصل احتراق این دو سوخت، کدام گزینه درست است؟ (دمای محیط ۲۵°C است.)

۱) $T_{DP_{CH_4}} = T_{DP_{C_2H_4}} = 25°C$

۲) $T_{DP_{C_2H_4}} > T_{DP_{CH_4}}$

۳) $T_{DP_{CH_4}} = T_{DP_{C_2H_4}}$

۴) $T_{DP_{CH_4}} > T_{DP_{C_2H_4}}$

$$CH_4 + 1.1(2(O_2+3.76N_2)) \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 2.2 \times 3.76 N_2 + 0.2 O_2$$

$$C_2H_4 + 1.1(3(O_2+3.76N_2)) \rightarrow 2CO_2 + 2H_2O + 3.3 \times 3.76 N_2 + 0.3 O_2$$

پاسخ صحیح گزینه 4:

$$P_{H_2O})_{CH_4} = \frac{2}{2+1+2.2\times3.76+0.2}$$

$$P_{H_2O})_{C_2H_4} = \frac{2}{2+2+2.2\times3.76+0.2}$$

که $P_{H_2O})_{CH_4} > P_{H_2O})_{C_2H_4}$ ← در تیجه پاسخ گزینه 4 است

۵۵- اگر گرمای نهان تبخیر یک مایع (L) را ثابت فرض کنیم، کدام عبارت، گزینهٔ مناسبی برای فشار بخار مایع در شرایط دور از نقطهٔ بحرانی است؟

۱) $\exp\left(\frac{L}{RT}\right)$

۲) $\exp\left(-\frac{L}{RT}\right)$

۳) $\exp\left(\frac{L}{RT^2}\right)$

۴) $\exp\left(-\frac{L}{RT^2}\right)$

پاسخ صحیح گزینه 2 باتوجه به معادله کلاپیرون کلاسیوس داریم.

$$\left.\frac{dP}{dT}\right)_{sat} = \frac{h_{fg}}{T(v_g - v_f)} \quad , \quad v_g \gg v_f \rightarrow v_{fg} \simeq v_g \quad , \quad v_g = \frac{RT}{P}$$ گاز ایده آل

$$\frac{dP}{dT} = \frac{h_{fg} P}{RT^2} \rightarrow \frac{d\ln P}{dT} = \frac{h_{fg}}{RT^2} \rightarrow d\ln P = \frac{h_{fg}\, dT}{RT^2}$$

$$P = \exp\left(\frac{h_{fg}}{-RT}\right) \xrightarrow[m=1 \quad L=h_{fg}]{L=m h_{fg}} P = \exp\left(-\frac{L}{RT}\right)$$

۵۶- یک مخلوط هوا و بخار با رطوبت نسبی ϕ و دمای T و فشار کل P وارد یک فرایند تهویه‌مطبوع می‌شود. مقدار جرم بخار آب ورودی به کل جرم هوا و بخار برابر کدام است؟ (P_g فشار بخار اشباع در دمای T است.)

۱) $\frac{0.622\phi P_g}{P + 0.378\phi P_g}$

۲) $\frac{0.622\phi P_g}{P - P_g}$

۳) $\frac{0.622\phi P_g}{P - 0.378\phi P_g}$

۴) $\frac{0.622\phi P_g}{P + P_g}$

پاسخ صحیح گزینه 3 می باشد.

$$k = \frac{m_v}{m_v + m_a}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{m_a}{m_v} + 1 \rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{w} + 1$$

$$w = \frac{0.622\varphi P_g}{P - \varphi P_g} \rightarrow \frac{1}{w} = \frac{P - \varphi P_g}{0.622\varphi P_g}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{P - \varphi P_g + 0.622\varphi P_g}{0.622\varphi P_g}$$

$$k = \frac{0.622\varphi P_g}{P - 0.378\varphi P_g}$$

۵۷- دو جسم جامد ۱ و ۲ با دماهای اولیهٔ T_1 و T_2 به عنوان منابع (گرم و سرد) یک چرخهٔ کارنو، به‌کار گرفته می‌شود. در نهایت دماهای این دو جسم به دمای تعادل می‌رسد. مقدار کار تولیدی این چرخه، کدام است؟ ($T_2 > T_1$ و انرژی داخلی هر جسم از رابطهٔ $U = mcT$ پیروی می‌کند. m و c برای هر دو جسم یکسان و اعداد ثابت هستند.)

۱) $mc(T_2 + T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2})$
۲) $mc(T_2 - T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2})$
۳) $mc(T_2 + T_1 + 2\sqrt{T_1 T_2})$
۴) $mc(T_2 - T_1 + 2\sqrt{T_1 T_2})$

پاسخ صحیح گزینه ۱ است.

در سیکل کارنو بازگشت ناپذیری صفر است

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_f}{T_1} + mc \ln \frac{T_f}{T_2} = 0$$

$$T_f = \sqrt{T_1 T_2}$$

$$W = Q_H - Q_L = mc(T_2 - T_f) - mc(T_f - T_1)$$

$$= mc(T_1 + T_2 - 2T_f)$$

$$= mc(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}$$

۵۸- اگر برای یک سیستم، رابطهٔ $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P = 0$ برقرار باشد. کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟ (سیستم تک مؤلفه‌ای با جرم ثابت است.)

۱) ظرفیت گرمایی ویژهٔ جسم صفر است.
۲) ظرفیت گرمایی ویژهٔ جسم ∞ است.
۳) ضریب انبساط حجمی جسم صفر است.
۴) سیستم حاوی مایع ساب‌کولد است.

پاسخ صحیح گزینه ۲ است

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

$$ds = \frac{c_p}{T}\,dT - \frac{v}{T}\,dp \leftarrow$$

$$S = S(T, P)$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T dP$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P = \frac{T}{c_p} = 0 \rightarrow c_p \rightarrow \infty$$

۵۹- دو صفحهٔ خیلی بزرگ خاکستری و پخش‌کنندهٔ موازی در دمای T_1 و T_2 مفروض است. $(T_1 > T_2)$ ضرایب تشعشع دو سطح $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ می‌باشد. صفحهٔ نازک سومی با همان ابعاد صفحه‌های ۱ و ۲ بین آن‌ها به‌صورت موازی قرار می‌گیرد. اگر ضریب تشعشع صفحهٔ نازک در هر دو طرف ε باشد، در حالت تعادل حرارتی و فقط با درنظرگرفتن انتقال حرارت تشعشعی، دمای صفحهٔ سوم، کدام است؟

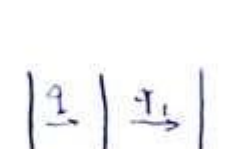
۱) $\frac{1}{2}(T_1^4 - T_2^4)$

۲) $\frac{1}{4}(T_1^4 + T_2^4)$

۳) $(\frac{T_1^2 + T_2^2}{2})^2$

۴) $(\frac{T_1^4 + T_2^4}{2})^{\frac{1}{4}}$

پاسخ صحیح گزینه ۴ است



$q = q_1$

$\varepsilon(T_1^4 - T_a^4) = \varepsilon(T_a^4 - T_2^4)$

$2T_a^4 = T_1^4 + T_2^4$

$T_a = \left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

۶۰- برای جریان آرام داخل لوله با قطر D، اگر سیال از نظر هیدرودینامیکی گسترش یافته باشد، در کدام حالت از نظر حرارتی نیز حتماً گسترش یافته است؟

۱) $Pr < 1$

۲) $Pr > 1$

۳) $Re\,Pr < 5$

۴) $Re\,Pr > 5$

پاسخ صحیح گزینه ۱ است

برای $Pr < 1$ ، $X_{e,t} < X_{e,h}$

۶۱- سیالی با دمای ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد وارد یک لولهٔ دما ثابت ۸۰ درجهٔ سانتی‌گراد می‌شود. اگر دمای خروجی سیال از لوله ۶۰ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، درست‌ترین مقدار برای اختلاف دمای متوسط سیال و سطح $(T_w - T_b)$ در رابطهٔ سرد شدن نیوتن $q = \bar{h}(T_w - T_b)$، تقریباً چند درجهٔ سانتی‌گراد است؟

۱) ۲۰
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۶۰

پاسخ صحیح گزینه 2 است.

$$\Delta T_{Lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$

$$\Delta T_1 = 80 - 20 = 60$$

$$\Delta T_2 = 80 - 60 = 20$$

$$\Delta T_{Lm} = 36^\circ$$

۶۲- جسمی به شکل صفحه‌ای با طول و عرض بزرگ در دمای اولیهٔ یکنواخت T_1 قرار دارد. اگر یک طرف صفحه به‌طور ناگهانی در دمای T_0 قرار گیرد، ۲ ثانیه طول می‌کشد تا در طرف دیگر صفحه حس شود. اگر ضخامت صفحه دو برابر شود، چند ثانیه طول می‌کشد تا در طرف دیگر صفحه حس شود؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) بستگی به ضریب پخش حرارت (α) دارد.

پاسخ صحیح گزینه 3 است.

$$Fo)_1 = Fo)_2$$

$$\frac{\alpha t_1}{L_1^2} = \frac{\alpha t_2}{L_2^2} \Rightarrow t_2 = t_1 \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 =$$

$$= 2\,(2)^2 = 8 \text{ sec}$$

پاسخ تشریحی کنکور 95 (مکانیک)

۶۳- جریان سیال اطراف یک کره به قطر D را درنظربگیرید. اگر سرعت جریان به سمت صفر میل‌کند، عدد نوسلت ($Nu = \frac{hD}{k}$)، به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

۱) صفر
۲) ۰/۵
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ صحیح گزینه 4 است.

۶۴- هوا با سرعت u_∞ و دمای T_∞ از روی یک صفحهٔ افقی با دمای ثابت T_w جریان دارد. اگر طول صفحه از نظر فیزیکی بی‌نهایت شود ($x \to \infty$)، آنگاه مقدار عدد نوسلت موضعی در $x \to \infty$، کدام است؟

۱) به بی‌نهایت میل‌می‌کند، چون دمای سیال و دیوار با هم مساوی می‌شوند.
۲) به بی‌نهایت میل‌می‌کند، چون همهٔ سیال در لایهٔ مرزی به دمای دیوار می‌رسد.
۳) به صفر میل‌می‌کند، چون سرعت جریان بسیارزیاد می‌شود.
۴) به صفر میل‌می‌کند، چون ضخامت لایهٔ مرزی حرارتی بی‌نهایت می‌شود.

پاسخ صحیح گزینه 2 است.

زمانی که $x \to \infty$ میل می کند $Re_x \to \infty$ میل می کند در نتیجه جریان آشفته خواهد شد در نتیجه Nu_x از رابطه مقابل محاسبه می شود

$$Nu_x = 0.0296\, Re_x^{4/5}\, Pr^{1/3}$$

در نتیجه $x \to \infty$

$Re_x \to \infty$

$Nu_x \to \infty$

۶۵- کدام معادلهٔ دیفرانسیل، بیانگر قانون بقای جرم برای جریان دوبعدی سیال تراکم‌پذیر با حجم مخصوص v و میدان سرعت $\vec{V}$ می‌باشد؟

۱) $\frac{D\ln v}{Dt} = \vec{\nabla}.\vec{V}$

۲) $\frac{Dv}{Dt} = \vec{\nabla}.\vec{V}$

۳) $\frac{D\ln v}{Dt} = -\vec{\nabla}.\vec{V}$

۴) $\frac{Dv}{Dt} = -\vec{\nabla}.\vec{V}$

پاسخ: صحیح گزینه ۱ است

نکته:

$$\nabla\cdot(\varphi F) = (\nabla\varphi)\cdot F + \varphi(\nabla\cdot F)$$

معادله بقای جرم:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{نکته}]{\text{مطابق}} \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\cdot F)\rho + \rho(V\cdot\nabla)$$

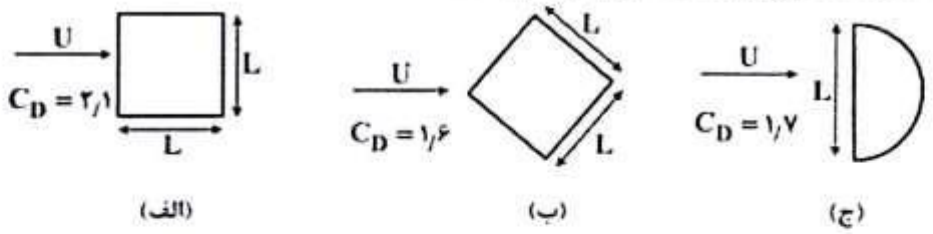
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{V}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla\cdot\vec{V})$$

$$\rho v = 1 \rightarrow d\rho = -\frac{dv}{v^2} \quad , \quad \rho = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{Dv}{Dt} = \frac{1}{v}(\nabla\cdot V) \longrightarrow \frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt} = (\nabla\cdot\vec{V})$$

$$\frac{D\ln v}{Dt} = (\nabla\cdot\vec{V})$$

۶۶- جریان با سرعت U از روی میله‌هایی به طول بی‌نهایت و با مقاطع زیر عبور می‌کند. ضریب درگ هرشکل در کنار آن نوشته شده است. نیروی درگ کدام گزینه بیشتر است؟



۱) (الف)

۲) (ب)

۳) (ج)

۴) هر سه دارای نیروی درگ یکسانی هستند

پاسخ صحیح گزینه 2 است.

$$F_D \propto C_D A$$

الف) $F_D \propto 2.1\ L$

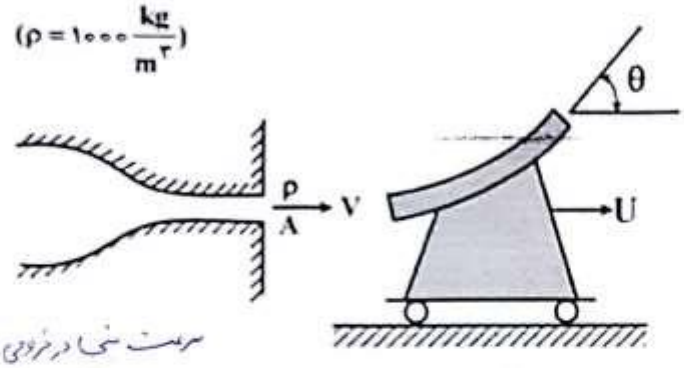
ب) $F_D \propto 1.6\sqrt{2}\ L$

ج) $F_D \propto 1.7\ L$

$$F_{D_{\text{ب}}} > F_{D_{\text{الف}}} > F_{D_{\text{ج}}}$$

۶۷- یک جت آب با سطح مقطع $600mm^2$ و سرعت ثابت $30\frac{m}{s}$ مطابق شکل زیر به یک گاری برخورد می‌کند. سطح داخلی گاری، سیال را با زاویهٔ $\theta = 60^\circ$ منحرف می‌کند. نیروی افقی لازم برای اینکه گاری با سرعت ثابت $U = 15\frac{m}{s}$ حرکت کند؛ و سرعت مطلق سیال در خروجی گاری، کدام است؟

$(\rho = 1000\frac{kg}{m^3})$



۱) $15\sqrt{3}\frac{m}{s}$, $76.5N$

۲) $45\frac{m}{s}$, $76.5N$

۳) $15\sqrt{3}\frac{m}{s}$, $67.5N$

۴) $45\frac{m}{s}$, $67.5N$

پاسخ صحیح گزینه 3 است

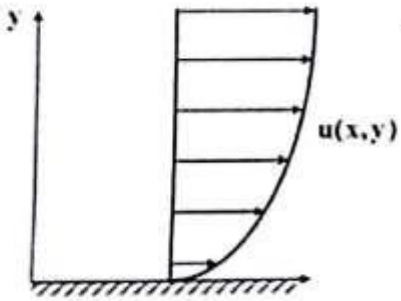
سرعت سیال در خروجی

$V_2' = V - U = 15$

سرعت مطلق $\vec{V}_2 = \vec{U} + \vec{V}_2' = 15\hat{i} + 15(\cos 60\, i + 15 \sin 60\, j) \rightarrow V_2 = 15\sqrt{3}$

$F_x = \rho A (V-U)^2 (1 - \cos\theta) = 67.5N$

۶۸- اگر مؤلفهٔ افقی سرعت یک جریان دو بعدی غیرقابل تراکم بر روی یک صفحه $u = U(\frac{3y}{ax} - \frac{y^3}{a^3x^3})$ باشد، مؤلفهٔ عمودی سرعت جریان، کدام است؟



۱) $U(\frac{3y^3}{2ax^2} - \frac{2y^3}{3a^3x^3})$

۲) $U(\frac{3y}{ax} - \frac{2y^3}{a^3x^3})$

۳) $U(-\frac{3y^3}{ax^2} + \frac{2y^3}{a^3x^3})$

۴) $U(\frac{3\ln(\frac{y}{x})}{a} + \frac{2y}{a^3x})$

پاسخ صحیح گزینه 1 است

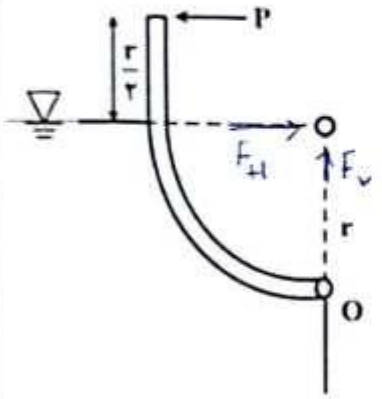
معادله پیوستگی به صورت زیر است (تراکم ناپذیر):

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial y} = U\left(\frac{3y}{ax^2} - \frac{2y^2}{a^2x^3}\right)$

$v(y) = U\left(\frac{3y^2}{2ax^3} - \frac{2y^3}{3a^2x^3}\right)$

۶۹- مقدار نیروی P برای متعادل نگه‌داشتن دریچهٔ زیر با عرض w چقدر است؟ دریچه در نقطهٔ O به تکیه‌گاه لولا شده و وزن مخصوص سیال پشت دریچه γ می‌باشد.



۱) $\frac{1}{2}\gamma r^2 w$

۲) $\frac{1}{9}\gamma r^2 w$

۳) $\frac{2}{9}\gamma r^2 w$

۴) $\frac{1}{3}\gamma r^2 w$

پاسخ صحیح گزینه ۱ است

$F_H = \gamma h_c A = \gamma \frac{r}{2} \times rw$

$F_H = \gamma \frac{r^2 w}{2}$

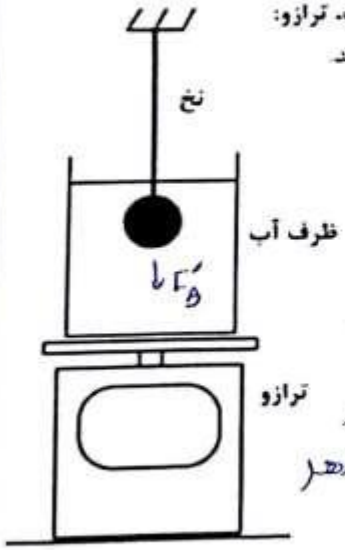
$\sum M_O = 0$

$\frac{\gamma r^2 w}{2} \times r = P \times \frac{3}{2} r$

$P = \frac{1}{3}\gamma r^2 w$

نکته: نیروها به مرکز لولا انتقال داده شود تا گشتاور نیروی عمودی را صفر کنیم (نکته جزوه)

۷۰- ظرف پر از آبی را روی ترازو قرار می‌دهیم. پس از آنکه ترازو وزن آن را نشان داد، یک گوی کروی فولادی را به نخی می‌بندیم و آن را در حالی که انتهای نخ را در دست گرفته‌ایم به آرامی در آب فرو می‌بریم؛ سپس بدون آنکه گوی با کف ظرف تماس داشته باشد، صبر می‌کنیم تا به حالت تعادل برسد. در این حالت، ترازو:



۱) بسته به حجم آب و گوی کروی، ممکن است وزن بیشتر یا کمتری را نشان دهد.

۲) وزن بیشتری را نشان می‌دهد.

۳) همان وزن قبلی را نشان می‌دهد.

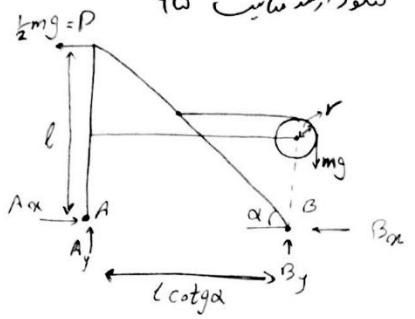
۴) وزن کمتری را نشان می‌دهد.

پاسخ صحیح گزینه 2 است.

مطابق شکل اگر گوی داخل آب قرار گیرد عکس العمل نیروی شناوری به کف ظرف وارد شده و ترازو وزن بیشتری را نشان می‌دهد

استاتیک برمبنای دفترچه 110A به نام خدا کنکور ارشد مکانیک ۹۵

①



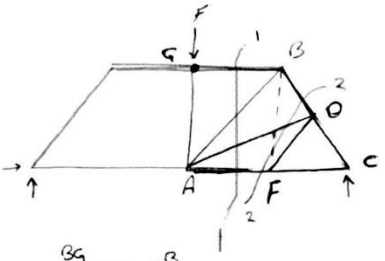
سئوال V1

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y\, l\cot g\alpha - mg\left(\frac{l}{10} + l\cot g\alpha\right) + \frac{1}{2} mgl = 0$$

$$\Rightarrow B_y = mg\left(1 - \frac{2}{5}\tan\alpha\right)$$

گزینه 4

سئوال V2

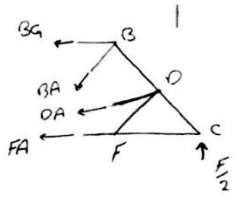


توجه ۱: شکل کاملاً متقارن است (نسبت به AF)

توجه ۲: اندازه‌ها به طریقی داده شده‌اند که زوایا معلوم باشند. $\begin{pmatrix} AF = FB = 1 \\ AF \perp FB \end{pmatrix}$

توجه ۳: با دقت ① مشاهده عضو BG یک عضو صفر نیروی نیست.

ابتدا برش 1-1 را می‌زنیم. چون عضو BG را قطع می‌کند پس این برش قابل قبول است.



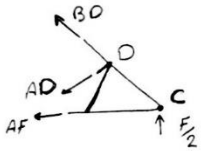
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -BG \times 1 = \frac{F}{2} \times 2 \Rightarrow BG = -F \quad ①$$

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} \times 0.5 + BA \times 0.5\sqrt{2} + BG \times 0.5 - FA \times 0.5 = 0 \quad ②$$

با جایگذاری ① در ②

$$BA\frac{\sqrt{2}}{2} = FA \times \frac{1}{2} + \frac{F}{2} - \frac{F}{4} \quad ③$$

برای پیدا کردن نیروی FA، برش 2-2 را می‌زنیم.



$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} \times 0.5 = AF \times 0.5$$

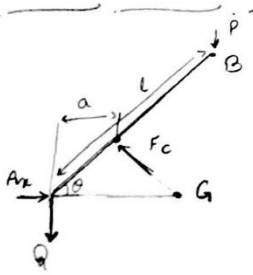
$$\Rightarrow AF = \frac{F}{2} \quad ④$$

④ into ③

$$BA\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{4} + \frac{F}{2} - \frac{F}{4} = \frac{F}{2} \Rightarrow BA = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

گزینه 3

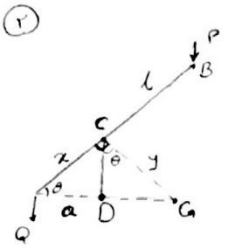
سئوال V3



توجه ۱: ابعاد لهزنده A داده نشده است پس Q حول نقطه مفصل گشتاوری تولید نمی‌کند.

توجه ۲: درصورت وجود یا عدم وجود اصطکاک نیروی A_x باید در نظر گرفته شود.

توجه ۳: نیروی P معلوم است و نیروی Q مجهول. پس سعی می‌کنیم حول نقطه‌ی G (محل برخورد نیروی A_x و F_c) گشتاور بگیریم.



توجه ٤ : نیروی عکس العمل غلتک بر میله AB عمود است.

برای یافتن فاصله‌ی افقی B تا G کافیست طول DG را بدست آوریم.

$$x\cos\theta = a \Rightarrow x = \frac{a}{\cos\theta} \qquad \overline{CD} = x\sin\theta = a\tan\theta$$

$$y\cos\theta = \overline{CD} = a\tan\theta \Rightarrow y = a\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\overline{DG} = y\sin\theta = a\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = a\tan^2\theta$$

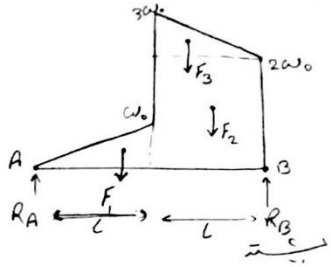
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow P\big(\underbrace{l\cos\theta - (a + a\,tg^2\theta)}\big) - Q(a + a\,tg^2\theta) = 0$$

این طول اگر مثبت باشد یا منفی در معادله فوق صادق است.

$$\Rightarrow Q = P\left(\frac{l}{a}\cdot\frac{\cos\theta}{1+tg^2\theta} - 1\right) = P\left(\frac{l}{a}\cdot\cos^3\theta - 1\right)$$

گزینه ۱

سؤال ۷٤



$$R_A + R_B = F_1 + F_2 + F_3$$

مساحت شکل نیرو $\rightarrow$ $F_1 = \frac{w_0 l}{2}$; $F_2 = 2w_0 l$ $\quad F_3 = \frac{w_0 l}{2}$

$$R_A + R_B = 3w_0 l$$

گزینه ۱ و ۲ حذف می‌شوند.

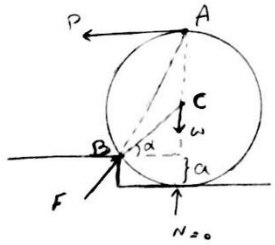
* از همین جا می‌توان تشخیص داد که $R_B > R_A$ چون از وسط میله AB نیروهای بسته در سمت تکیه‌گاه B قرار دارند.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_1 \times \frac{2l}{3} + F_3 \times \frac{4l}{3} + F_2 \times \frac{3l}{2} = R_B \times 2l$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}w_0 l + \frac{2}{3}w_0 l + 3w_0 l\right) = 2w_0 l$$

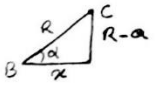
گزینه ٤

سؤال ۷۵



در استاتیک هر موقع صحبت از بیشترین مقدار برای نیرو شد (به منظور آستانه حرکت)، نیروی عکس العمل مربوط به سطحی که قرار است نسبت به آن حرکت داشته باشد صفر در نظر گرفته می‌شود.

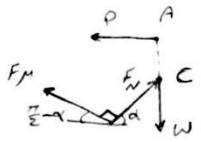
* نیروی F باید به صورتی وارد شود که در تعادل استاتیکی باشد. پس محل برخورد سه نیروی P، w و F در نقطه A است.



$$x^2 = R^2 - (R-a)^2 = a^2 - 2Ra \Rightarrow x = \sqrt{2Ra - a^2}$$

همانطور که می‌دانیم نیروی F برآیند نیروی عمود بر سطح (که در راستای BC به سمت مرکز دایره است) و اصطکاک است.

(۳)



بنابراین نیروی F را تجزیه می‌کنیم.

F_N نیروی عمود بر سطح و F_μ نیروی اصطکاک

$$F_\mu = \mu F_N$$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow P(2R-a) = W x \Rightarrow P(2R-a) = W\sqrt{2Ra-a^2}$ ①

در شکل اصلی

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_N \sin\alpha + F_\mu \cos\alpha = W \Rightarrow F_N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = W$ ②

در شکل فوق

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = P$ ③

$$\xrightarrow{②\div③} \frac{W}{P} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \; ④ \; ; \quad ① : \frac{W}{P} = \frac{2R-a}{\sqrt{2Ra-a^2}}$$

$$\frac{\tan\alpha + \mu}{1-\mu\tan\alpha} = \frac{2R-a}{\sqrt{2Ra-a^2}}$$

توجه: محاسبه عبارت روبرو و پیدا کردن μ خیلی ساده است ولی ممکن است سر جلسه کنکور برخی‌ها تا جمینهای سؤال برسند و آنرا رها کنند. در مسائل اینچنین حتما به دنبال ساده کردن عبارات باشید.

$$\tan\alpha = \frac{R-a}{\sqrt{2Ra-a^2}} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{R}$$

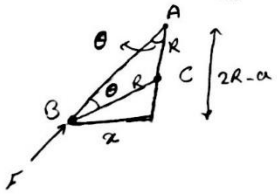
$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha + \mu}{1-\mu\tan\alpha} = \underbrace{\frac{R}{\sqrt{2Ra-a^2}}}_{\frac{1}{\cos\alpha}} + \frac{R-a}{\sqrt{2Ra-a^2}}\tan\alpha = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} \; (*) \Rightarrow \cos\alpha(\tan\alpha+\mu) = (1+\sin\alpha)(1-\mu\,tg\alpha)$$

$$\Rightarrow \cancel{\sin\alpha} + \mu\cos\alpha = 1 - \mu\tan\alpha + \cancel{\sin\alpha} - \mu\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \mu\left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \mu\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 1 \Rightarrow \mu = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \xrightarrow[(*)]{\text{با توجه به}} \mu = \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{2R-a}$$

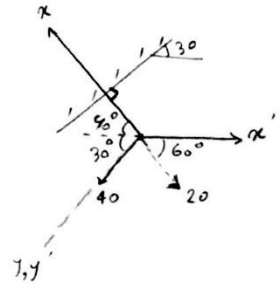
گزینه ۳

روش دوم. چون می‌دانیم که نیروی عمود بر سطح به سمت مرکز دایره است پس جهت F_N مشخص است. از آنجایی که جهت نیروی کل سطح (F) نیز معلوم است (به دلیل تعادل) پس می‌توان از این نکته استفاده کرد که ضریب اصطکاک ایستا برابر با تانژانت زاویه بین F (نیروی برآیند سطح) و F_N نیروی عمودی سطح می‌باشد.



$\hat{A}$ زاویه $\tan\theta = \frac{x}{2R-a} = \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{2R-a}$

سؤال ۷۶



محورهای y و y' یک محور هستند ولی چون x'y' متعامد نیستند باید هر دو مؤلفه F را در راستای x' تجزیه کنیم.

$$F_{x'} = 20\cos 60^\circ - 40\cos 30$$
$$= 10 - 20\sqrt{3}$$

دقت شود که F_y و $F_{y'}$ یکسان نخواهند بود. گزینه ۳

سؤال ۷۷ با توجه به اینکه وزن (توزیع شتاب و جرم) یکنواخت است و چون محدود به شکل است (در حالت دو بعدی) از تشابه استفاده کرده و $\frac{2h}{3}$ پاسخ درست است.

البته توصیه می‌شود جداول مربوط به اشکال هندسی در کتاب‌ها حفظ گردد.

* نکته بالا برای همه موارد قابل تعمیم نیست.

گزینه ۳

مقاومت مصالح کنکور ارشد مکانیک ۹۵ برمبنای دمتر چه 110 A

سؤال ۷۸ در این سؤال در $r=0$ مقدار σ_r و σ_θ یک مقدار و یک علامت دارند. از آنجایی که هیچ اشاره‌ای به دو بعدی بودن نکرده پس $\sigma_z = 0$ است. معیار تسکا براساس تنش برشی ماکزیمم است.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_r - 0}{2} = \frac{\sigma_r}{2} = \frac{\sigma_\theta}{2} \quad ; \quad \text{برای شکست} \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_r = \sigma_y \Rightarrow \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 = \sigma_y \Rightarrow \omega = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{8\sigma_y}{(3+\nu)\rho}}$$

گزینه ۳

سؤال ۷۹ در صورت سؤال گفته شده که تنش مجاز وجود دارد. یعنی باید نیروی میله AC را بدست آوریم و به تنش تبدیل کنیم.

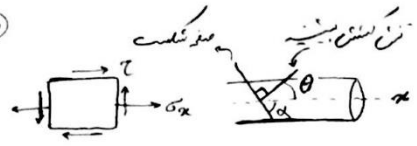
$$F_{AC} = \frac{F}{\sin\theta} \Rightarrow \sigma_{AC} = \frac{F}{A\sin\theta} \quad (1)$$

طول AB ثابت است. پس طول l_{AC} به l_{AB} ربط می‌دهیم. $l_{AC}\cos\theta = l_{AB}$ (۳) ; $V_{AC} = A\,l_{AC}$ (۲) حجم میله AC

$$(1) \rightarrow A_{AC} = \frac{F}{\sigma_{AC}\sin\theta} \quad ; \quad \text{برای حالت بحرانی} \quad \sigma_{AC} = \sigma_y \Rightarrow A_{AC} = \frac{F}{\sigma_y \sin\theta}$$

$$\Rightarrow V_{AC} = \frac{\overbrace{F}^{\text{ثابت}}\ \overbrace{l_{AB}}^{\text{ثابت}}}{\underbrace{\sigma_y}_{\text{ثابت}}\ \sin\theta\cos\theta} \qquad \frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

گزینه ۲



سؤال ۸۰

برای یافتن صفحه‌ی شکست در اجسام ترد باید صفحه‌ی تنش ماکزیمم کششی را پیدا کنیم.

$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{50\times10^3}{\pi(30)^2\times10^{-6}} \Rightarrow \sigma_x = \frac{500}{900\pi}\ MPa$

$\tau_{max} = \frac{T.R}{J} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2\times376}{\pi(30)^3\times10^{-9}} \Rightarrow \tau = \frac{752}{27\pi}$

پس داریم در این سؤال.

از دایره مور به سادگی می‌توان استفاده نمود.

$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta = 22,5^\circ$

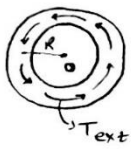
صفحه‌ی شکست بر صفحه‌ی بیشترین تنش عمود است.

$\theta + 90 = 112.5^\circ \longrightarrow 180 - 112.5^\circ = 67,5^\circ$

اگر بخواهیم از روابط خود سؤال استفاده کنیم باید τ_θ را مساوی صفر قرار داده پس زاویه بدست آمده را با 90 جمع کنیم.

گزینه ۲

سؤال ۸۱



* در این سؤال باید دقت کنیم که از فرمول $\tau = \frac{T.R}{J}$ نمی‌توان استفاده کرد چون این رابطه مقدار τ در یک لایه‌ی نازک از جسم را می‌دهد ولی چون در اینجا یک لایه به ضخامت t داریم پس باید از تعادل استفاده کنیم.

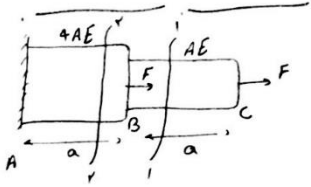
* R و r یکی هستند (هر دو شعاع تا وسط ضخامت هستند).

$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \tau(2\pi R t)\times r = T_{ext}$

$\Rightarrow \tau = \frac{T_{ext}}{2\pi r^2 t}$

گزینه ۱

سؤال ۸۲



چون مساحت‌ها تغییر می‌کند پس نیاز به دو برش داریم.

$U_{total} = U_{AB} + U_{BC} = \frac{(2F)^2 a}{2(4AE)} + \frac{F^2 a}{2AE} \Rightarrow U = \frac{F^2 a}{AE}$

گزینه ۲

سؤال ۸۳

نقطه‌ی H بر روی سطح آزاد است پس هیچ تنش برشی‌ای تحمل نمی‌کند $\tau_{xy} = 0$

تنش حاصل نتیجه گشتاور خمشی V_y است که باعث ایجاد کششی در H می‌شود.

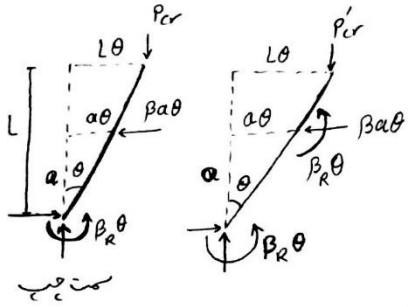
ماکزیمم تنش‌ها می‌خواهیم. $\sigma_x = \frac{M_z y}{I} = \frac{(10\times2)\times0,1}{\frac{1}{12}(0,1)(0,2)^3} \Rightarrow \sigma_x = 30\ MPa$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$

گزینه ۳

$\sigma_{max} = 30$ $\quad \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 15\ MPa$

دقت کنید که به هیچ وجه نباید $\tau = \frac{V_y}{A}$ را در نظر بگیرید چون H یک نقطه است نه صفحه.

سؤال ۸۴



* تنها تفاوت بین دو شکل فنر پیچشی در نقطه‌ی B است و چون فنر در برابر کمانش مقاومت می‌کند (یعنی نیروی بیرونی را بالاتر می‌برد) پس گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند. از طرفی چون در نقطه A ثابت است و تغییر زاویه نسبت به این نقطه سنجیده می‌شود و فنر پیچشی در نقطه‌ی B کار نیست. شکل اول اضافه است فقط گشتاور تولید می‌کند (در محاسبه‌ی گشتاور در زاویه ضرب می‌شود و چون زاویه θ ثابت است و با تغییر طول a، تغییری نمی‌کند) پس گزینه ۱ درست است.

سمت چپ: $\Sigma M_A = 0 \quad P_{cr} L\theta - (\beta a\theta)a - \beta_R\theta = 0 \longrightarrow P_{cr} = \frac{\beta a^2}{L} + \frac{\beta_R}{L}$

سمت راست: $\Sigma M_A = 0 \quad P'_{cr}(L\theta) - (\beta a\theta)a - \beta_R\theta - \beta_R\theta = 0$

$$\Longrightarrow P'_{cr} = \underbrace{\frac{\beta a^2}{L} + \frac{\beta_R}{L}}_{P_{cr}} + \frac{\beta_R}{L} \Longrightarrow P'_{cr} = P_{cr} + \frac{\beta_R}{L}$$

گزینه ۱

سؤال ۸۵

① $\sigma = \frac{pr}{t}$ ② $\sigma = \frac{pr}{2t}$

① $\begin{cases} \sigma_{max} = \frac{4r}{t} \\ \sigma_{min} = 0.8\frac{r}{t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma_m = 2.4\frac{r}{t} \\ \sigma_a = 1.6\frac{r}{t} \end{cases}$

② $\begin{cases} \sigma_{max} = 2\frac{r}{t} \\ \sigma_{min} = 0.4\frac{r}{t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma_m = 1.2\frac{r}{t} \\ \sigma_a = 0.8\frac{r}{t} \end{cases}$

$\sigma_{e,a} = \sqrt{\sigma_{1,a}^2 + \sigma_{2,a}^2 - \sigma_{1,a}\sigma_{2,a}} = 0.8\sqrt{3}\frac{r}{t}$

$\sigma_{e,m} = \sqrt{\sigma_{1,m}^2 + \sigma_{2,m}^2 - \sigma_{1,m}\sigma_{2,m}} = 1.2\sqrt{3}\frac{r}{t}$

$\frac{\sigma_{e,a}}{S_e} + \frac{\sigma_{e,m}}{S_u} = \frac{1}{F.S} \Longrightarrow \left(\frac{0.8\sqrt{3}}{200} + \frac{1.2\sqrt{3}}{400}\right) r = \frac{t}{2} \xrightarrow{r = \frac{3}{4}} 100t = (0.8 + 0.6)\frac{3}{4} \times \sqrt{3}$

$t = \frac{1.05\sqrt{3}}{100} \times 1000 \text{ mm} = 18.2 \text{ mm}$

پاسخی که به عنوان کلید کنکور سراسری داده شده است مقدار $t = 25^{mm}$ انتخاب شده است.

گزینه ۲

سؤال ۸۲

بیشترین مقدار تنش برشی در گلیدها در لبه‌های بالایی و پایینی اتفاق می‌افتد.

$$\sigma_m = 0 \qquad \sigma_a = \frac{(F \cdot 0.6) \times b/2}{\frac{1}{12} b^4} = \frac{7200}{b^3} \times 10^3 \ mpa \quad (1)$$

* b باید به صورت مبلی‌متر وارد شود.

* روش اول: استفاده از فرمول‌های داخل صورت سؤال.

$$a = \frac{(0.83 \times 770)^2}{S_e} \qquad S_e = k_a k_b (0.5 S_{ut}) = 0.48 \times 0.85 \times \frac{770}{2}$$

$$b = -\frac{1}{3} \log\left(\frac{0.83 \times 770}{S_e}\right) \qquad S_f = \sigma_y = a (10^4)^b$$

این محاسبات در جلسه کنکور و بدون ماشین حساب سخت یا غیرممکن است.

* روش دوم: تست

می‌دانیم که در ابتدا قطعه تحت تنش‌های وارده به طور استاتیکی باید مقاومت کند. پس تا زمانی که $(\sigma_m + \sigma_a) < S_y$ است به طور استاتیکی وامانده نمی‌شود و علاوه بر آن چون قرار است 10^4 سیکل را تحمل کند:

۱) اگر مقدار a از یک حدی کمتر باشد به طور استاتیکی وامانده می‌شود.

۲) اگر مقدار b از یک حدی بیشتر باشد با اینکه به طور استاتیکی وامانده نمی‌شود ولی عمر آن به شدت افزایش می‌یابد.

پس گزینه‌هایی که در حالت استاتیکی وامانده می‌شوند حذف می‌شود (در این سؤال هیچ گزینه‌ای حذف نمی‌شود)

پس گزینه ۱ و ۲ اگر در رابطه (1) جای‌گذاری کنیم برای σ_a خواهیم داشت:

گزینه ۱ $\sigma_a = 409 \ MPa$

گزینه 2 $\sigma_a = 168 \ MPa$

از اینجا واضح است که گزینه‌های دیگر حذف شده و گزینه ۱ جواب است.

(ما برای کامل کردن این نوشته باید ذکر شود که فاصله گزینه ۱ تا گزینه 2 به قدری زیاد است که احتمال تقریب زیاد است.

* البته دانش‌آموزان گرامی توجه کنید که وقتی سؤالی با این سبک و با این حجم محاسباتی داده می‌شود، حتماً راه حل تستی برای آن وجود دارد و گزینه‌ها به نحوی داده می‌شوند که بتوان با جایگذاری آن‌ها تقریب مناسبی بدست آورد.

سؤال ۸۷

بیشترین تنش در $r = 0$ اتفاق می‌افتد.

$$\sigma_r = \sigma_\theta \Big|_{r=0} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r_0^2 \qquad \tau = 0$$

معیار ترسکا $\longrightarrow$ تنش برشی ماکزیمم $\Rightarrow \tau_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r_0^2 \qquad \tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \tau_y \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8 \sigma_y}{(3+\nu)\rho}} \times \frac{1}{r_0}$$

گزینه ۱

سؤال ۸۸

$\sigma = \frac{F}{hl}$; $\sigma_{min} = \frac{20\times10^3}{hl}$ MPa (l, h به سمتی شد) ; $\sigma_{max} = \frac{100\times10^3}{hl}$ MPa

$\sigma_m = \frac{60\times10^3}{hl}$ MPa ; $\sigma_a = \frac{40\times10^3}{hl}$ MPa ; $S_u = 427$ MPa ; $S_e = 81.82$ MPa ; $n = 2.5$

$$\Rightarrow \frac{427}{2.5} = \frac{60\times10^3}{hl} + \underbrace{\frac{427}{81.82}}_{5.2}\times\frac{40\times10^3}{hl} = \frac{10^3}{hl}\underbrace{(60+5.2\times40)}_{268} \Rightarrow \frac{427}{2.5} = \frac{268\times10^3}{hl}$$

$$l = \frac{2.5\times268\times10^3}{427\times20} = 78.7 \text{ mm} \simeq 79 \text{ mm}$$

گزینه ۴

دقت کنید که نکته این سؤال در این است که اول لازم نیست S_e را تعیین دهید و ثانیاً محاسبات l را تقریب انجام دهید. اگر تقریب قابل قبول باشد، بین گزینه‌ها استباهی پیش نمی‌آید.

سؤال ۸۹ ابتدا گزینه‌ها کنار می‌گذاریم گزینه ۱ لهیدگی در پیچ‌ها رخ نمی‌دهد، پس حذف می‌شود.

گزینه ۴ کشش در اعضا. چون تمرکز تنش داریم به خاطر پیچ‌ها پس این مورد سبب واماندگی نخواهد شد

پس بین دو گزینه ۲ و ۳ که محتمل‌تر است بررسی می‌کنیم.

تنش لهیدگی در اعضا $\sigma = \frac{F}{2\times20\times20}$ MPa

قطر پیچ ، ضخامت عضو

برای عضو $n = \frac{\sigma}{S_y} \Rightarrow n = \frac{F}{800\times490}$

تنش برشی در پیچ‌ها $\sigma = \frac{F}{2\times\frac{\pi}{4}(20)^2}$ MPa

برای پیچ $n = \frac{F}{200\pi\times420}$

از مقایسه‌ی ضرایب n متوجه می‌شویم که $n_{\text{پیچ}} < n_{\text{اعضا}}$ (خرج کمتر اعضا n بیشتر است) پس پیچ‌ها در معرض واماندگی قرار دارد.

گزینه ۳

سؤال ۹۰

* در واحدهای داده شده دقت کنید.

$\sigma = \frac{F}{A}$; $A = 0.2\times0.05 = 0.01$ $\Rightarrow \sigma = 100F$

* ksi یعنی klb بر in^2. پس مقدار F که محاسبه می‌شود برحسب klb است ولی در صورت سؤال برحسب lb خواسته.

* اطلاعات پس داده شده است یعنی از برش پس صرف نظر شده است پس تنش لهیدگی در عضو را حساب می‌کنیم.

$\sigma_{max} = \frac{F}{A}$; $\sigma_{min} = 0$ $\Rightarrow \sigma_m = \sigma_a = \frac{F}{2A}$ استاتیکی : $\sigma_{max} = S_y \Rightarrow 100F = 110$

$\Rightarrow F = 1.1$ klb $= 1100$ lb ; برای عمر بی‌نهایت : $S_e = k_e S'_e = \frac{1}{k_f}\times0.5 S_{ut} = \frac{1}{4}150$

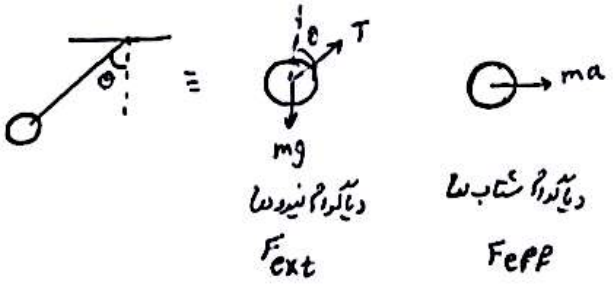
برای عمر بی‌نهایت باید $\sigma_{max} \le S_e$ باشد پس: $\frac{F}{A} = S_e = \frac{1}{4}\times150 \Rightarrow 100F = 37.5$

گزینه ۴

$F = 0.375$ klb $= 375$ lb

* یادتان باشد که در $S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$ ، k_f حتماً کوچکتر از ۱ است اما این k_f که در صورت سؤال ذکر شده باید در k_e محاسبه شود.

پاسخ سؤال (۹۱)



$$\sum F_{ext} = \sum F_{eff}$$

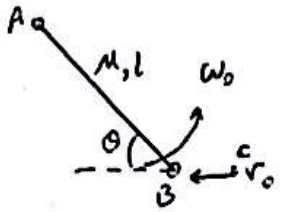
در راستای x : $T\sin\theta = ma$ (۱)

در راستای y : $T\cos\theta = mg$ (۲)

گزینه (۲)

$$\xrightarrow{(1)\div(2)} \tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow \boxed{a = g\tan\theta}$$

پاسخ سؤال (۹۲) فرض می‌کنیم میله در نقطه‌ی A ثابت است و B حول A دوران می‌کند پس B در جهت پاد ساعتگرد حول A دوران می‌کند. قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای حول A را می‌نویسیم.



$$\frac{1}{3}Ml^2\omega_0 - mv_0 l\sin\theta = \frac{1}{3}(M+m)l^2\omega \quad (1)$$

ممان میله را حول A حساب کردیم. تکانه جسم را در فاصله عمودی از A ضرب کردیم.

جهت ω_0 و v_0 حول A یکی نیستند پس پاد ساعتگرد را دلخواه و مثبت فرض کردیم.

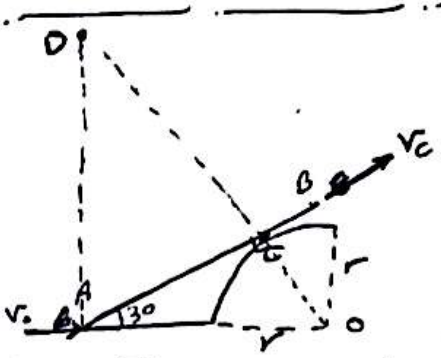
$$\xrightarrow{(1)} \frac{1}{3}Ml^2\omega_0 - (0{,}05M)(\sqrt{50}\,l\omega_0)\,l\underbrace{\sin 45}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}(1{,}05)Ml^2\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\omega_0 - 0{,}25\omega_0 = \frac{1{,}05}{3}\omega \Rightarrow \omega = \frac{(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})3}{1{,}05}\omega_0 = \frac{1-0{,}75}{1{,}05}\omega_0 = \boxed{\frac{0{,}25}{1{,}05}\omega_0}$$

مثبت بدست آمد یعنی در جهت پاد ساعتگرد (حول A) می‌چرخد. یعنی ω میله $\frac{10}{43}\omega_0$ و به صورت پاد ساعتگرد است.

گزینه (۳)

پاسخ سؤال (۹۳) میله بر سطح ربع دایره مماس است، پس سرعت آن هم مماس بر ربع دایره (یعنی عمود بر شعاع است). از هر دو سرعت عمودی رسم کرده تا مرکز آنی دوران بدست آید.



(۱) ضلع روبرو به زاویه 30° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است (برای $\overline{OA}$) مقدار $\overline{OC} = r$ پس $\overline{OA}$ بدست می‌آید.

(۲) در مثلث $\overset{\triangle}{OAC}$ زاویه‌ی $\hat{O}A$ برابر 60° است پس زاویه $\hat{D}$ برابر 30° است.

در این مثلث $\overset{\triangle}{AOD}$: ضلع روبرو به زاویه 30°، نصف وتر است. $\overline{OD}$ و $\overline{DC}$ بدست می‌آید. پس مقدار $\overline{AD}$ نیز بدست می‌آید.

$$\overline{AD} = 2\sqrt{3}r \Rightarrow \omega_{CAD} = \frac{v_0}{2\sqrt{3}r} \;;\; v_C = \overline{BD}\,\omega_{AB} = 3r\times\frac{v_0}{2\sqrt{3}r} = \frac{\sqrt{3}v_0}{2}$$

$$v_C = v_A + v_{C/A} \Rightarrow v_{C/A} = v_C - v_A = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j\right) - v_0 i = \left(-\frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}j\right)v_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{|v_{C/A}|}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}v_0}{\sqrt{3}r} = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{v_0}{r}$$

گزینه (۲)

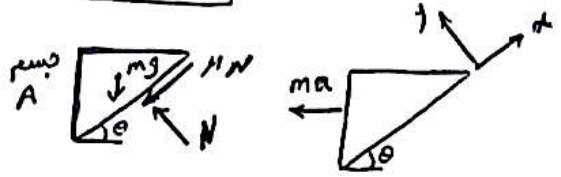
دقت کنید که ω_{CAD} را نمی‌توان برای ω_{AB} به کار برد.

صفحه ۲

$P = 2ma \Rightarrow ma = \frac{P}{2}$ (۱)

(۹۴)

معادله حرکت را در دو جهت موازی با سطح θ و عمود بر آن می‌نویسیم.



$x: \sum F_{ext} = \sum F_{eff} \Rightarrow -\mu N - mg\sin\theta = -ma\cos\theta$ (۲)

$y: N - mg\cos\theta = ma\sin\theta \Rightarrow N = mg\cos\theta + ma\sin\theta$ (۳)

$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} \mu(mg\cos\theta + \underbrace{ma}_{\frac{P}{2}}\sin\theta) + mg\sin\theta = \frac{P}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{P}{2}(\cos\theta - \mu\sin\theta) = mg(\mu\cos\theta + \sin\theta) \Rightarrow P = 2mg\frac{(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{(\cos\theta - \mu\sin\theta)}$

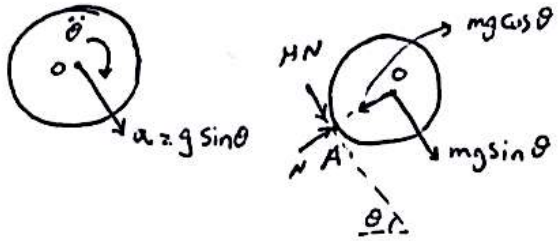
یادتان باشد که N را نباید با $mg\cos\theta$ اشتباه بگیرید، خصوصاً در حرکت‌های شتابدار.

گزینه 4

---

(۹۵) بلوک m با نیروی $mg\sin\theta$ بر روی سطح لغزنده با شتاب $g\sin\theta$ کشیده می‌شود. برای اینکه نیروی به میله وارد نشود باید شتاب دستگیره هم شتاب خطی مرکز دیسک $g\sin\theta$ باشد.

چون لغزش نداریم $a = \ddot{\theta}$.



$\sum M_A = I_A\ddot{\theta}$

$\Rightarrow mg\sin\theta . r = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2g\sin\theta}{3r}$

$\sum M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow \mu N \times r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr^2 \times \frac{2g\sin\theta}{3r} = \frac{1}{3}mg\sin\theta . r$

$\sum F = 0$ در راستای عمود بر سطح شیبدار : $N = mg\cos\theta \Rightarrow \mu mg\cos\theta . r = \frac{1}{3}mg\sin\theta . r$

گزینه (۲)

$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{3}\tan\theta}$

---

(۹۶) pt از جنس تکانه خطی است. وقتی P به B نیرو وارد می‌کند ضمن اینکه B و A با سرعت v_B به طرف راست حرکت می‌کنند، جسم A حرکت غلتشی خود را برخلاف جهت نیروی P آغاز می‌کند.

مرکز دیسک A دارای دو سرعت است.

پایداری تکانه خطی: $pt = (m_A + m_B)v_B - m_A r\dot{\theta}$ (۱)

کی خطی به خاطر حرکت B و دیگری غلتشی.

پایداری تکانه زاویه‌ای حول نقطه C (نقطه تماس دیسک A و صفحه B): $I_C\dot{\theta} - m_A v_B . r = 0$

$\Rightarrow \frac{3}{2}m_A r^2\dot{\theta} = m_A v_B r \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{2v_B}{3r}}$ (۲)

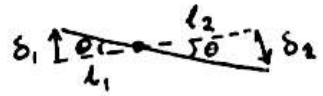
$\xrightarrow{(۱),(۲)} pt = (m_A + m_B)v_B - m_A\left(\frac{2v_B}{3}\right) = v_B\left(\frac{1}{3}m_A + m_B\right) \Rightarrow \boxed{v_B = \frac{3pt}{m_A + 3m_B}}$

گزینه (۱)

صفحه ۳

پاسخ سؤال (97) برای اینکه x و θ از هم دکوپله شوند باید مرکز جرم بلوک در نقطه‌ای قرار بگیرد که با جابجایی به مقدار θ، هیچ تغییری در مسافت x نداشته باشیم.

پس می‌توان به صورت روبرو در نظر گرفت



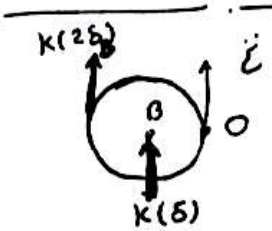
چون نیروی فنر متناسب با جابجایی آن است پس:

$F_{s_1} = F_{s_2}$ فنر $\Rightarrow k_1\delta_1 = k_2\delta_2$

$\Rightarrow k_1(l_1\theta) = k_2(l_2\theta) \Rightarrow k_1 l_1 = k_2 l_2 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}k_1$

گزینه ۲

پاسخ سؤال (98) حول O معادله حرکت را می‌نویسیم.



غلتک بدون جرم است $\Leftarrow I_O = 0$

$\sum M_O = I_O\ddot{\theta}$

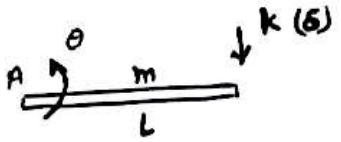
$\Rightarrow k(2\delta_B)\times 2r + k(\delta)r = 0$

$k(4\delta_B r) = -k(\delta_B - \delta_C)r \quad (1)$

$\delta_B \rightarrow$ تغییر مکان نقطه‌ی B

$\delta_C \rightarrow$ تغییر مکان نقطه C

$\delta \rightarrow \delta_B - \delta_C$



$\sum M_A = I_A\ddot{\theta} \Rightarrow -k(\delta)L = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$

به نکته سوال ۱۰۲ مراجعه کنید.

$\Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = -kL(\delta_C - \delta_B) \xrightarrow{(2)}$

$\xrightarrow{(1)} 4\delta_B = -\delta_B + \delta_C \Rightarrow \boxed{5\delta_B = \delta_C}\ (*)$

$\xrightarrow{(*)\text{ in }(2)} \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = -kL(4\delta_B)$

متصیدس‌ها از یک جنس می‌گیریم. برای انجام باید بدانیم $\ddot{\theta}$ حول A است. پس $\delta_B = \frac{\delta_C}{5}$ جایگذاری می‌کنیم. بعد از آن $\theta = \frac{\delta_C}{L}$ خواهیم داشت.

$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = -k\times\frac{4}{5}l^2\theta \Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{4}{5}kl^2\theta = 0$

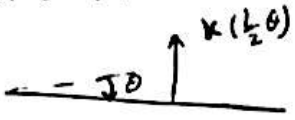
$\Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{12k}{5m}}}$

گزینه ۱

پاسخ سؤال (99)

$\sum M_O = I_O\ddot{\theta}$

$I_O = \underbrace{\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{میله}} + \underbrace{mx^2}_{\text{جرم روی میله}}$



$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}ml^2 + mx^2\right)\ddot{\theta} = -k\left(\frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2} = -k\frac{L^2}{4}\theta$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}ml^2 + mx^2\right)\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{4}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \qquad \omega_n^2 = \frac{kL^2/4}{\frac{1}{3}ml^2 + mx^2}$

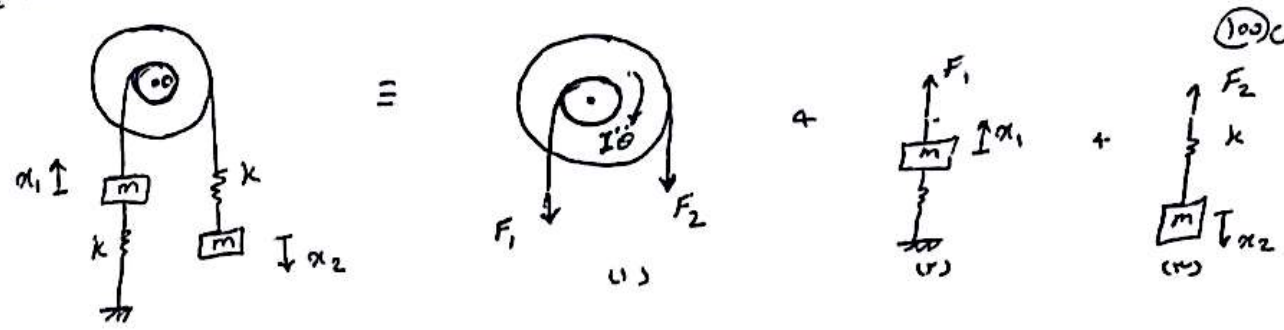
$\Rightarrow 4\pi^2 = \frac{kL^2/4}{\frac{1}{3}mL^2 + mx^2} \rightarrow \frac{1}{3}ml^2 + mx^2 = \frac{kL^2}{16\pi} \Rightarrow mx^2 = \left(\frac{k}{16\pi} - \frac{1}{3}m\right)L^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{k}{16\pi m} - \frac{1}{3}}\times L$

گزینه (4)

صفحه ۴

پاسخ سوال (۱۰۰)



(۱) $m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - 2x_1)$

(۲) $m\ddot{x}_1 = -kx_1 + F_1$

(۳) $(\frac{1}{2}mr^2)\ddot{\theta} = -F_1\frac{r}{2} + k(x_2 - 2x_1)\times r$ $\qquad \frac{x_1}{\frac{r}{2}}, \theta$

$\xrightarrow{(۳),(۲)} (\frac{1}{2}mr^2)(\frac{2\ddot{x}_1}{r}) + (m\ddot{x}_1 + kx_1)\frac{r}{2} = k(x_2 - 2x_1)r$

$\Rightarrow \begin{cases} (mr + \frac{mr}{2})\ddot{x}_1 + \frac{5}{2}kx_1 r - kx_2 r = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - 2kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3m}{2} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2}k & k \\ -2k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\xrightarrow{(۱)}$

$k - m\omega^2 = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} \frac{5}{2}k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -2k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \frac{1}{2}(5k - 3m\omega^2)(k - m\omega^2) = 4k^2$

$\Rightarrow (5k - 3m\omega^2)(k - m\omega^2) = 4k^2 \longrightarrow (20 - 3\omega^2)(4 - \omega^2) = 64$

$3\omega^4 - 32\omega^2 + 80 = 64 \Rightarrow 3\omega^4 - 32\omega^2 + 16 = 0 \qquad \Delta' = (16)^2 - 3(+16) = 16(13)$

$\omega^2 = \frac{16 \pm 4\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}}$ گزینه (۳)

صفحه ۵

$\sum M_O = I_O \ddot{\theta} \xrightarrow[\text{جرم}]{\text{میله بودن}} I_O = 0$

(۱۰۱) گ

الف) $F \times L - k L^2 \theta - 4c L^2 \dot{\theta} = 0 \Rightarrow F = kL\theta + 4cL\dot{\theta}$

laplace: $F(s) = kL\,\theta(s) + csL\,\theta(s) \Rightarrow \frac{\theta}{F} = \frac{1}{4csL + kL} = \frac{1/L}{4\times\frac{3}{2}s + 3}$

$\Rightarrow \frac{3L\theta = y}{F} = \frac{1}{1+2s}$

ب) $k(x - L\theta)L - kL^2\theta - 4cL^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow kLx = 2kL^2\theta + 4cL^2\dot{\theta}$

laplace: $(2kL + 4csL)\theta(s) = kX \Rightarrow \frac{3L\theta = Y}{X} = \frac{3}{2s+2} = \frac{1.5}{s+1}$

---

(۱۰۲)

x_1 جابجایی جرم m_1

x_2 جابجایی جرم m_2

$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2)$

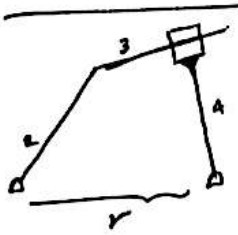
$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 + k(x_1 - x_2) + F_0 \sin\omega t$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = F_0 \sin\omega t \end{cases}$$

گزینه (۱)

---

(۱۰۳) در گزینه‌ی ۱ مقدار فاصله‌ی 2 تا 4 ذکر نشده پس غلط است.



$r_2\omega_2 e^{i\theta_2} + r_3\omega_3 e^{i\theta_3} = r + r_4\omega_4 e^{i\theta_4}$

در گزینه‌ی دوم ←

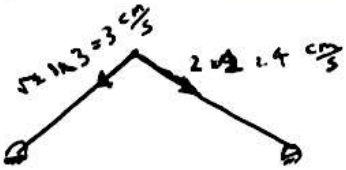
$v_B + (v_{C_3} - v_B) = v_{C_4} + (v_{C_3} - v_{C_4})$

$\Rightarrow v_B - v_{C_4} = -(v_{C_4} - v_B) = v_B - v_{C_4}$ ✓

گزینه (۲)

---

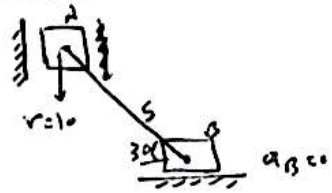
(۱۰۴) بوسیله 3 و 4 می‌شود 5 در هر طرف پایین.

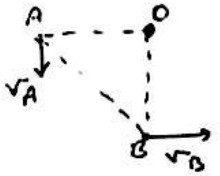


گزینه 4

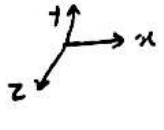
---

(۱۰۵)





$\omega_{OAB} = \frac{v_A}{\overline{OA}} = \frac{10}{7\cos 30} = \frac{2}{\cos 30}\hat{k}$



منفی

$\sum M_O = I_O \ddot{\theta}$ $\xrightarrow[\text{جرم}]{\text{میله بودن}}$ $I_O = 0$

الف) $F\alpha L - kL^2\theta - 4cL^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow F = kL\theta + 4cL\dot{\theta}$

laplace: $F(s) = kL\,\theta(s) + csL\,\theta(s) \Rightarrow \frac{\theta}{F} = \frac{1}{4csL + kL} = \frac{1/L}{4\times\frac{3}{2}s + 3}$

$\Rightarrow \frac{3L\theta = Y}{F} = \frac{1}{1 + 2s}$

ب) $k(x - L\theta)L - kL^2\theta - 4cL^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow kLx = 2kL^2\theta + 4cL^2\dot{\theta}$

laplace: $(2kL + 4csL)\theta(s) = kX \Rightarrow \frac{3L\theta = Y}{X} = \frac{3}{2s + 2} = \frac{1.5}{s+1}$

---

(۱۰۲)

x_1 جابجایی جرم m_1

x_2 جابجایی جرم m_2

$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k(x_1 - x_2)$

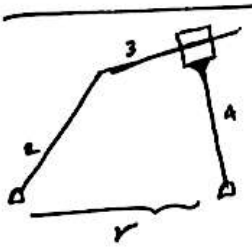
$m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 + k(x_1 - x_2) + F_0\sin\omega t$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = F_0\sin\omega t \end{cases}$$

گزینه (۱)

---

(۱۰۳) در گزینه‌ی ۱ مقدار فاصله‌ی 2 تا 4 ذکر نشده پس غلط است.



$r_2\omega_2 e^{i\theta_2} + r_3\omega_3 e^{i\theta_3} = r + r_4\omega_4 e^{i\theta_4}$

در گزینه دوم ←

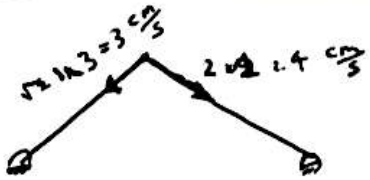
$v_B + (v_{C_3} - v_B) = v_{C_4} + (v_{C_3} - v_{C_4})$

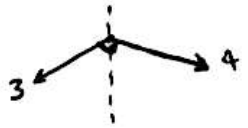
$\Rightarrow v_B - v_{C_4} = -(v_{C_4} - v_B) = v_B - v_{C_4}$ ✓

گزینه (۲)

---

(۱۰۴) بر آمنی 3 و 4 می‌شود 5 در طرف پایین.

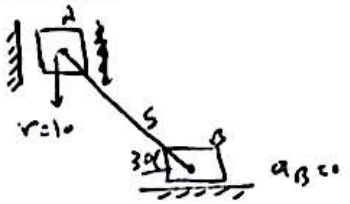


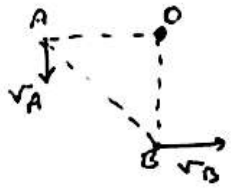


گزینه 5

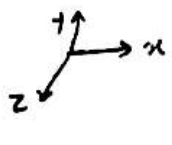
---

(۱۰۵)





$\omega_{OAB} = \frac{v_A}{\overline{OA}} = \frac{10}{7\cos30} = \frac{2}{\cos30}\hat{k}$



عضو ۲

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + (\vec{\alpha}\times\vec{r}) + \cancel{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}} + \cancel{\vec{a}_{rel}}$$

۱) شتاب کوریولیس نداریم، چون حرکت جسم B مقید است ولی قیدی که B را در خود جای داده، حرکتی ندارد.

۲) A عدداً در نظر گرفته شده است پس r از A به سمت B است.

$$\vec{0} = a_A\hat{j} + \frac{2}{\cos30}\hat{k}\times\Big[\underbrace{\frac{2}{\cos30}\hat{k}\times5(\cos30\,\hat{i} - \sin30\,\hat{j})}_{\frac{10}{\cos30}(\cos30\,\hat{j} + \sin30\,\hat{i})}\Big] + 5\alpha\,\hat{k}\times(\cos30\,\hat{i} - \sin30\,\hat{j})$$

$$\Rightarrow 0 = a_A\hat{j} + \frac{20}{\cos^2 30}(-\cos30\,\hat{i} + \sin30\,\hat{j}) + 5\alpha(\cos30\,\hat{j} + \sin30\,\hat{i})$$

i: $\frac{-20}{\cos30} + 5\alpha\sin30 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{\sin30\cos30} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

j: $a_A + \frac{10}{\cos30} + 5\alpha\cos30 = 0 \Rightarrow a_A = -\frac{10}{\frac{3}{4}} - 5\times\frac{16\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{40}{3} - 40 = -\frac{160}{3}$

به سمت پایین. گزینه (۳)

---

(۱۰۶) با قفل کردن عضو ۲ (جعبه‌ی حرکت عضو ۲ را بگیرید) هیچ عضو دیگری نمی‌تواند حرکت کند.

گزینه ۳

---

(۱۰۷)

$G(s) = \frac{k}{s^2(js+b)}$; $H = 1 \Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{k}{s^2(js+b)+k}$

1) $E(s) = R(s) - C(s) = \frac{1}{s^2} - \underbrace{\frac{k}{s^2(js+b)}}_{\text{تابع تبدیل حلقه باز}} \times \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{\text{ورودی}}\Big|_{s\to0} = \frac{s^2(js+b) - k}{s^2[s^2(js+b)]}\Big|_{s\to0} = \infty$

2) $\lim_{s\to0} sG(s) = \frac{ks}{s^2(js+b)} = \lim\frac{k}{s(js+b)} = \infty$

گزینه (۳)

یادتان باشد آنکه تکنیک بود از چه راه‌هایی استفاده کنید، راه‌های دوم ترجیح دارد. * به شکل انتهای دمین فایل مراجعه کنید.

---

(۱۰۸) برای بررسی پایداری می‌توان از مکان GH استفاده کرد. پاسخ‌ساز

تعداد صفرهای سمت راست GH می‌شود ۱، پس تعداد دورهای عقربه‌ی ساعتگرد عقربه‌ی ساعتگرد باید بشود ۱. (حول $-1+0j$)

گزینه ۱ صحیح است

یادتان باشد گزینه ۴ را باید اول نسبت به محور Real قرینه کنید و بعد تصمیم بگیرید.

برای بررسی بیشتر و یادگیری کامل به کانال @Mech_Source بپیوندید.

---

(۱۰۹) برای یافتن این سؤال ۴ روش را معرفی می‌کنیم. دو روش تشریحی و دو روش تستی در کانال تلگرام @Mech_Source

① صفر نداریم و ۳ قطب داریم $\Rightarrow G(s), H(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$

معادله مشخصه: $s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0 \Big|_{s=j\omega} \Rightarrow (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + k = 0$

صفحه ۷

قسمت حقیقی = ۰ $\Rightarrow -3\omega^2 + k = 0$

قسمت موهومی = ۰ $\Rightarrow -\omega^3 + 2\omega = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = 0, \pm\sqrt{2}}$ → با جایگذاری در رابطه بالا

نتیجه بدست می‌آید: $\boxed{k = 6}$

معیار پایداری راث (۲)

s^3	1	2
s^2	3	k
s^1	$\frac{6-k}{3}$	
s^0	k	

برای اینکه نمودار مکان هندسی، محور موهومی را قطع کند باید یک سطر تماماً صفر در وسط آرایه‌ی راث داشته باشیم یعنی: $\frac{6-k}{3} = 0$ $\boxed{k = 6}$

پس از معادله کمکی بدست آمده از سطر دوم استفاده می‌کنیم یعنی: $3s^2 + k = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{2}j$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \pm\sqrt{2}}$

گزینه ۴ برای روش‌های قسمت به کانال مراجعه کنید.

(۱۱۰) در این نمودار اولین بخشی که بعد از خط ثابت وجود دارد خطی با شیب ± 40 است. پس باید در صورت $G(s)$ یک عبارت از مرتبه‌ی ۲ (یعنی توان ۲ باشد) داشته باشیم. با مقدار $\frac{1}{T} = 0.2$ * زمان با شکوهی با این سؤال زیر ۲۰ ثانیه.

گزینه ۱ برای یادگیری نمودار بوده برای کنکور به کانال @Mech_Source بپیوندید.

برای پرسش و یادگیری کتاب کنکوری، فایل‌های قرار داده خواهد شد که در آن کتاب سؤالات یا کنکورها همراه با توضیح قرار دارد.

پاسخ سوال ۱۰۷ با فرض j=2 و b=3.